聖マリアンナ医科大（数学再現）2023/1/24 実施

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

$\boxed{1}$

(1)　$3^{2x+1}+3^{-2x+1}-20\,(3^x+3^{-x})+10$ の最小値は $\boxed{}$ ，そのときの x は

$x=\boxed{}$， $\boxed{}$ である.

(2)　座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $\begin{cases} x=e^{-t}\cos\dfrac{\pi}{2}t \\ y=e^{-t}\sin\dfrac{\pi}{2}t \end{cases}$ で表されている.

速さは $\dfrac{e^{-t}}{2}\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であり， $t=0$ から $t=\boxed{}$ までの点 P の道のりが

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{4}$ となる.

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とすると，

$$y=3(t^2-2)-20t+10=3\left(t-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{88}{3}$$

であり， $t\geqq 2$ であるから $t=\dfrac{10}{3}$ のとき最小値 $\boxed{-\dfrac{88}{3}}$

また， $t=\dfrac{10}{3}$ より

$$3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$$

$$(3^x)^2-10\cdot 3^x+3=0$$

$$(3^x-1)(3^x-3)=0\qquad \therefore\quad \boxed{x=0,\ 1}$$

(2)　$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}t+\cos\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ \dfrac{dy}{dt}=e^{-t}\left(-\sin\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$ 　であるから，速さは

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$　（$\dfrac{\pi}{2}t=\theta$ とした）

$$=\sqrt{e^{-2t}\left\{\left(\frac{\pi^2}{4}\sin^2\theta+\pi\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)+\left(\sin^2\theta-\pi\sin\theta\cos\theta+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\theta\right)\right\}}$$

$$=e^{-r}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}=\frac{e^{-t}}{2}\boxed{\sqrt{\pi^2+4}}$$

$t=0$ から $t=a$ までの点 P の道のりは，

$$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}\int_0^a e^{-t}dt=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}\left(1-\frac{1}{e^a}\right)$$

であるから， これが $\dfrac{\sqrt{\pi^2+4}}{4}$ に一致するとき

$$1-\frac{1}{e^a}=2\qquad\therefore\quad e^a=?$$

聖マリアンナ医科大（数学再現）2023/1/24 実施

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

$\boxed{2}$

(1) $\begin{cases} \log_{10}2.6=\log_{10}\dfrac{5.6}{2}=\log_{10}5.2-\log_{10}2 \\ \log_{10}2.6=\log_{10}1.3\times 2=\log_{10}1.3+\log_{10}2 \end{cases}$ が与えられており，$\log_{10}2.6$ を 2 通りで評価する問題.

(2) 7^{289} の桁数は $\boxed{}$，下 2 桁の数は $\boxed{}$，最高位とその次の位の数は $\boxed{}$.

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$，$\log_{10}7=0.8451$，$\log_{10}11=1.0414$，
$\log_{10}13=1.1139$ $\log_{10}17=1.230$，$\log_{10}19=1.279$ (※表で与えられていた)

(2) $\log_{10}7^{289}=289\log_{10}7=289\times 0.8451=244.2339 \quad \therefore \quad 7^{289}=10^{244.2339}$

$10^{244}\leqq 7^{289}<245$ であるから 7^{289} は$\boxed{245\text{ 桁}}$

また，$7^{289}=10^{1.2339}\times 10^{243}$ であり，

$$\begin{cases} \log_{10}17=1.230 \\ \log_{10}18=2\log_{10}3+\log_{10}2=1.2552 \end{cases}$$

であるから，$17\leqq 10^{1.239}<18$ となるので 7^{289} の最高位とその次の位の数は$\boxed{17}$

以下，100 を法として考える.

$$7^2\equiv 49,\quad 7^3=343\equiv 43,\quad 7^4=7^3\cdot 7\equiv 43\cdot 7=301\equiv 1$$

であるから，

$7^{289}=(7^4)^{72}\cdot 7\equiv 1^{72}\cdot 7=7$ 　よって，7^{289} の下 2 桁の数は$\boxed{07}$

聖マリアンナ医科大（数学再現）2023/1/24 実施

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

$\boxed{3}$

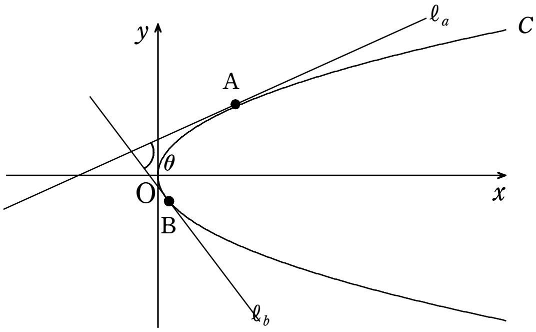
※■：不明な値

曲線 C を C : $y^2=2x$ とする．

(1)　C 上の点 A (■, ■), B (■, ■) における接線の交点を P とする．
P ($\boxed{}$, $\boxed{}$) であり，$\angle\mathrm{APB}=\boxed{\text{ア}}\,\pi$ である．

(2)　C 上の点 A$\left(\dfrac{a^2}{2},\ a\right)$, B$\left(\dfrac{b^2}{2},\ b\right)$ における接線の交点 P は P ($\boxed{}$, $\boxed{}$) である．このとき点 P$(X,\ Y)$ とする．

(3)　a, b を $\angle\mathrm{APB}=\boxed{\text{ア}}\,\pi$ を満たしながら動かすとき，X の最小値は $\boxed{}$ であり，点 P は双曲線 $\dfrac{x^2}{\boxed{}}-\dfrac{y^2}{\boxed{}}=1$ を x 軸方向に $\boxed{}$ 平行移動したものの一部を表す．



(2)　C 上の点 A，B における接線を ℓ_a, ℓ_b とする．$y^2=2x$ より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}$ $(y\neq 0)$

よって，

$$\ell_a : y=\frac{1}{a}\left(x-\frac{a^2}{2}\right)+a \qquad \therefore \quad \ell_a : y=\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}$$

同様に　$\ell_b : y=\dfrac{1}{b}x+\dfrac{b}{2}$

ℓ_a, ℓ_b の交点の x 座標は，

$$\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}=\frac{1}{b}x+\frac{b}{2}$$

$$\frac{b-a}{ab}x=-\frac{1}{2}(a-b)$$

$a\neq b$ であるから　$x=\dfrac{ab}{2}$

このとき，$y=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{ab}{2}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

以上から，P$\left(\dfrac{ab}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}-b\\-1\end{pmatrix}$$

であり，$\vec{v}=\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$，$\vec{u}=\begin{pmatrix} -b \\ -1 \end{pmatrix}$ とする．

$$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+1},\ |\vec{u}|=\sqrt{b^2+1},\ \vec{v}\cdot\vec{u}=-ab-1$$

であるから，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}=\frac{-ab-1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}\ \cdots ①$$

(3)（$\boxed{\text{ア}}=\dfrac{3}{4}$ という情報を元に解く）

① から，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-ab-1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}=\sqrt{2}(ab+1)$$

両辺正であるから 2 乗すると，

$$(a^2+1)(b^2+1)=2(ab+1)^2$$

$$(a+b)^2+(ab)^2-6ab-2=0\ \cdots ②$$

また，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくとき，

$$\begin{cases} X=\dfrac{ab}{2} \\ Y=\dfrac{a+b}{2} \end{cases}\qquad \therefore\quad \begin{cases} ab=2X \\ a+b=2Y \end{cases}$$

このとき，$2X,\ 2Y$ は 2 次方程式 $t^2-2Yt+2X=0$ の解であるから，

$$Y^2-2X\geqq 0 \qquad \therefore\quad Y^2\geqq 2X\ \cdots (※)$$

この条件の下で，② から

$$(2Y)^2+(2X)^2-6\cdot 2X-2=0 \qquad \therefore\quad \frac{\left(X+\frac{3}{2}\right)^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=1$$

したがって点 P の軌跡は，双曲線$\boxed{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1}$を x 軸方向に$\boxed{-\dfrac{3}{2}}$だけ平行移動したものの

(※) の範囲

$\boxed{4}$

点 O，A，B，C は格子点とする．

(1)　A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ とする．

(i)　三角形 OAB の面積が最小となるとき，$|a_1b_2-a_2b_1|=\boxed{}$ である．

(ii)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表される点 P が格子点であるとき，m，n が整数であること を示せ．

(2)　四角形 OABC の面積が最小となるような点 O，A，B，C を考える．

(i)　四角形 OABC の周および内部に含まれる格子点が O，A，B，C 以外に存在しないことを示せ．

(ii)　四角形 OABC が平行四辺形であることを示せ．

$\boxed{注}$

a，b を 0 でない整数とする．このとき，

a，b は互いに素な整数 $\Leftrightarrow$ $ax+by=1$ が整数解をもつ

ということを既知として答案で用いた．

(1)(i)　$(\triangle\mathrm{OAB})=\dfrac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$ であり，a_1，a_2，b_1，b_2 は整数であるから $|a_1b_2-a_2b_1|$ も整数である．

$|a_1b_2-a_2b_1|=0$ とすると，$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ となり 3 点 O，A，B が一直線上に並ぶので三角形が作られない．

$|a_1b_2-a_2b_1|=1$ とすると，$a_1b_2-a_2b_1=\pm1$

このような点 A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ をとることができるので，$|a_1b_2-a_2b_1|$ の最小値は$\boxed{1}$

(具体的には，A (3, 2)，B (1, 1) など)

(ii)　格子点 P$(p,\ q)$ が m，n を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せるとき，

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\qquad\therefore\quad\begin{cases}p=a_1m+b_1n & \cdots ①\\ q=a_2m+b_2n & \cdots ②\end{cases}$$

①$\times a_2-$②$\times a_1$から，

$$(a_2-a_1)p=(a_2b_1-a_1b_2)n$$

ここで(i)から $a_2b_1-a_1b_2=\pm1$ であるから，$n=\pm(a_2-a_1)p$ となり n は整数である．

同様に，①$\times a_2-$②$\times a_1$ から m が整数であることが示される．

(2)(i)　四角形OABC の面積が最小となるのは，△OAB の面積と△ OBC の面積が最小となるときである．(このような点A，B，C は$\boxed{注}$より必ずとることができる)

このとき，△OAB の周および内部に格子点 P が含まれているとすると，(1) の議論から整数 m，n を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=m\overrightarrow{\mathrm{OA}}+n\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せる．また，△OAB の周および内部に含まれるので，

$$0\leqq m+n\leqq1,\ 0\leqq m\leqq1,\ 0\leqq n\leqq1$$

であるから，$(m,\ n)=(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$ となり点 P はO，A，B のいずれかに一致する．

△OBC でも同様に議論でき，O，B，C のいずれかに一致する．