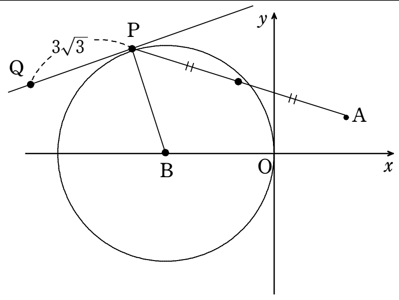
2023 岩手医科大（数学再現）2023/1/18 実施　英数 120 分

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)　**※第三者のチェックを受けていないので誤りを含む可能性があります．**

$\boxed{1}$

円 $C:(x+3)^2+y^2=9$，点 A (2, 1) とする．
C 上の点を P とすると P ($\boxed{\quad}\cos\theta-\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}\sin\theta$) であり，AP の中点を M とすると M ($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$) である．P が C 上を 1 周するときの点 M の軌跡は，中心 ($\boxed{\quad}$, $\boxed{\quad}$)，半径 $\boxed{\quad}$ の円である．
C の接線上に，点 P からの距離が $3\sqrt{3}$ となる点のうち一方を点 Q とする．点 P が C 上を 1 周するとき，点 Q は半径 $\boxed{\quad}$ の円を描く．点 Q の軌跡上に点 Q_0 をとるとき，線分 PQ_0 が通過してできる領域の面積は $\boxed{\quad}$ である．



P ($\boxed{3\cos\theta-3}$, $\boxed{3\sin\theta}$) であるから，線分 AP の中点 M は

$$\mathrm{M}\left(\boxed{\frac{3\cos\theta-1}{2}},\ \boxed{\frac{3\sin\theta+1}{2}}\right)$$

M (x, y) としたとき，

$$\begin{cases} x=\dfrac{3\cos\theta-1}{2} \\ y=\dfrac{3\sin\theta+1}{2} \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} \cos\theta=\dfrac{1}{3}(2x+1) \\ \sin\theta=\dfrac{1}{3}(2y-1) \end{cases}$$

よって，

$$\left\{\frac{1}{3}(2x+1)\right\}^2+\left\{\frac{1}{3}(2y-1)\right\}^2=1$$

$$\left\{\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right\}^2+\left\{\frac{2}{3}\left(y-\frac{1}{2}\right)\right\}^2=1$$

$$\therefore \quad \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$$

したがって，M は中心 $\boxed{\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)}$ ，半径 $\boxed{\dfrac{3}{2}}$ の円を描く．

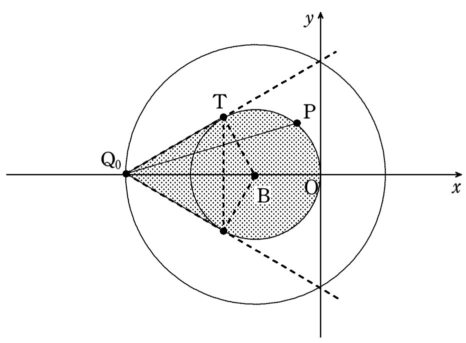
円 C の中心を B (3, 0) とし，Q (X, Y) とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$

$$=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\cos\theta\\3\sin\theta\end{pmatrix}+3\sqrt{3}\begin{pmatrix}\cos\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{cases} X=3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta-3 \\ Y=3\sin\theta-3\sqrt{3}\cos\theta \end{cases}$$

$(X+3)^2+Y^2=36$ から，Q は半径 $\boxed{6}$ の円を描く．



点 Q_0 を $\mathrm{Q}_0(-9,\ 0)$ としたとき，線分 PQ_0 が通過してできる領域は上図の打点部

$\angle\mathrm{TBQ}_0=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，その面積 S は扇形OBT と直角三角形BTQ_0 を考えて

$$S=2\left\{\frac{1}{2}\cdot3^2\cdot\frac{2\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sqrt{3}\right\}=\boxed{9\sqrt{3}+6\pi}$$

$\boxed{2}$

円 $C:x^2+y^2=36$ を底面とし高さが 3 である円柱を考える．点 M，D を M(3, 0, 0)，D (6, 0, 3) とし，M を通り x 軸に垂直な平面 α と円 C の交点をA，B とする．

(1)　AB＝$\boxed{\quad}$，DM＝$\boxed{\quad}$

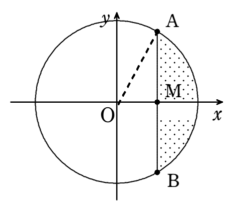
(2)　円柱と平面 α とで囲まれる部分の立体のうち，小さい方の立体の体積 V は
　V＝$\boxed{\quad}$ である．

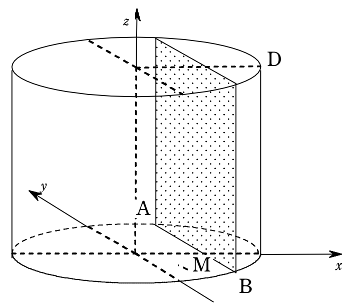
(3)　点A，B，D を通る平面を β とする．円柱と平面 β とで囲まれる部分の立体のうち小さい方の立体を考える．この立体の $x=t\ (3\leqq t\leqq6)$ による断面の面積 $S(t)$ は
　$S(t)$＝$\boxed{\quad}$ である．

(4)　(3) の立体の体積は $\boxed{\quad}$ である．

【Fig II】

【Fig I】





(1)　円 C と平面 α との交点A，B はA (3, $3\sqrt{3}$, 0)，B (3, $-3\sqrt{3}$, 0) であるから，

$$\mathrm{AB}=\boxed{6\sqrt{3}}$$

また，$\mathrm{DM}=\sqrt{(6-3)^2+3^2}=\boxed{3\sqrt{2}}$

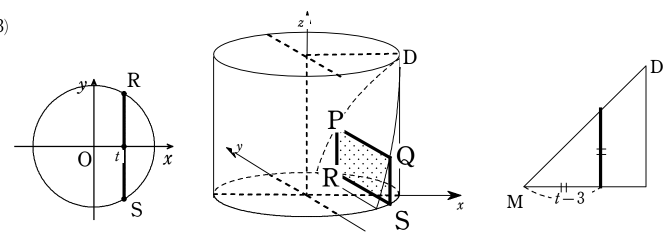
(2)　【Fig I】の打点部の面積 S は$\angle\mathrm{AOM}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから，

$$S=\frac{1}{2}\cdot6^2\cdot\frac{2\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot6\sqrt{3}\cdot3=12\pi-9\sqrt{3}$$

求める体積 V は，

$$V=3\times S=\boxed{36\pi-27\sqrt{3}}$$

(3)



平面 $x=t$ と立体との交点を上図のように P，Q，R，S とする．

R (t, $\sqrt{36-t^2}$)，S (t, $-\sqrt{36-t^2}$) であるから，RS ＝$2\sqrt{36-t^2}$

また，平面 β と xy 平面とのなす角は $\dfrac{\pi}{4}$ であるから，PR ＝$t-3$

断面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\mathrm{PR}\times\mathrm{RS}=\boxed{2\sqrt{36-t^2}\,(t-3)}$$

(4)　求める体積は，

$$\int_3^6 S(t)\,dt=\boxed{81\sqrt{3}-36\pi}$$

　※第三者のチェックを受けていないので誤りを含む可能性があります．

3

10 種類の人形を 2 体ずつ 1 つのカプセルに入れる．ただし， 1 つのカプセルの中には異なる種類の人形を入れるとする．完成したカプセルの中から 3 個選び，その中に含まれる 6 体の人形の種類を n とする．ただし，同じ種類の人形は区別がないものとする．

(1)　作られるカプセルは全部で $\boxed{}$ 通りある．また，ある特定の人形が含まれるカプセルは全部で $\boxed{}$ 通り作ることができる．

(2)　n は $\boxed{} \leqq n \leqq \boxed{}$ である．

(3)　$n=5$ となる確率は $\boxed{}$

(4)　$n=4$ となる確率は $\boxed{}$

人形の種類を $a, b, \cdots, j$ とする．また，カプセルの中に種類 a，種類 b の人形が含まれていることを $\boxed{ab}$ と表す．

(1)　a から j の異なる 10 個の中から 2 個を選び出す方法なので

$${}_{10}\mathrm{C}_2=\boxed{45\text{ 通り}}$$

特定の種類の人形を含むカプセルは，その種類以外の 9 種類から 1 つ選ぶだけ作られるので　$\boxed{9\text{ 通り}}$

(2)　取り出したカプセルに含まれている人形が $\boxed{ab}$，$\boxed{ac}$，$\boxed{bc}$ となるとき n は最小となる．また，$\boxed{ab}$，$\boxed{cd}$，$\boxed{ef}$ となるとき n は最大となる．

よって，$\boxed{3 \leqq n \leqq 6}$

(3)　$n=5$ となるとき，取り出される 6 体の人形は a，a，○，□，●，■ のように同じ種類から 2 体，他の 4 体は a 以外から異なる 4 種類の人形を選ぶことになる．

例えば a，a，b，c，d，e の場合，$\boxed{ab}$，$\boxed{ac}$，$\boxed{ad}$，$\boxed{ae}$ のカプセルから 2 個選び，残りの 1 個は 2 個のカプセルに含まれていない 2 種類を含むカプセルを選ぶ．

以上から求める確率は，

$$\frac{10\times{}_9\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2\times 1}{{}_{45}\mathrm{C}_3}=\boxed{\frac{252}{473}}$$

(4)　$n=4$ となるとき，カプセルの取り出し方は以下の 2 通りある

（i）　$\boxed{ab}$，$\boxed{a○}$，$\boxed{b□}$ と取り出すとき(○ と□ は a，b と異なり，互いに異なる種類)

a，b の選び方は ${}_{10}\mathrm{C}_2$ 通りあり，○と□ の選び方は ${}_8\mathrm{C}_2$ 通りある．

したがって，このようなカプセルの選び方は ${}_{10}\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_2\times 2!$ 通り

（ii）　a○，a□，a● と取り出すとき(○，□，● は a と異なり，互いに異なる種類)

a の選び方は 10 通りあり，○，□，■ の選び方は ${}_9\mathrm{C}_3$ 通りある．

したがって，このようなカプセルの選び方は $10\times{}_9\mathrm{C}_3$ 通り

以上から求める確率は，

$$\frac{{}_{10}\mathrm{C}_2\times{}_8\mathrm{C}_2\times 2!+10\times{}_9\mathrm{C}_3}{{}_{45}\mathrm{C}_3}=\boxed{\frac{112}{473}}$$