聖マリアンナ医科大（数学再現）2023/1/24 実施

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

$\boxed{1}$

(1)　$3^{2x+1}+3^{-2x+1}-20(3^x+3^{-x})+10$ の最小値は $\boxed{}$ ，そのときの x は

$x=\boxed{}$， $\boxed{}$ である．

(2)　座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $\begin{cases} x=e^{-t}\cos\dfrac{\pi}{2}t \\ y=e^{-t}\sin\dfrac{\pi}{2}t \end{cases}$ で表されている．

速さは $\dfrac{e^{-t}}{2}\sqrt{\boxed{\text{ア}}}$ であり， $t=0$ から $t=\boxed{}$ までの点 P の道のりが

$\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{4}$ となる．

(1)　$t=3^x+3^{-x}$ とすると，

$$y=3(t^2-2)-20t+10=3\left(t-\frac{10}{3}\right)^2-\frac{88}{3}$$

であり， $t\geqq 2$ であるから $t=\dfrac{10}{3}$ のとき最小値 $\boxed{-\dfrac{88}{3}}$

また， $t=\dfrac{10}{3}$ より

$$3^x+3^{-x}=\frac{10}{3}$$

$$(3^x)^2-10\cdot 3^x+3=0$$

$$(3\cdot 3^x-1)(3^x-3)=0 \quad \therefore \quad \boxed{x=-1,\ 1}$$

(2)　$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=-e^{-t}\left(\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2}t+\cos\dfrac{\pi}{2}t\right) \\ \dfrac{dy}{dt}=e^{-t}\left(-\sin\dfrac{\pi}{2}t+\dfrac{\pi}{2}\cos\dfrac{\pi}{2}t\right) \end{cases}$ であるから，速さは

$\sqrt{\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2}$　（$\dfrac{\pi}{2}t=\theta$ とした）

$$=\sqrt{e^{-2t}\left\{\left(\frac{\pi^2}{4}\sin^2\theta+\pi\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\right)+\left(\sin^2\theta-\pi\sin\theta\cos\theta+\frac{\pi^2}{4}\cos^2\theta\right)\right\}}$$

$$=e^{-r}\sqrt{\frac{\pi^2}{4}+1}=\frac{e^{-t}}{2}\boxed{\sqrt{\pi^2+4}}$$

$t=0$ から $t=a$ までの点 P の道のりは，

$$\int_0^a\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}\int_0^a e^{-t}dt=\frac{\sqrt{\pi^2+4}}{2}\left(1-\frac{1}{e^a}\right)$$

であるから， これが $\dfrac{\sqrt{\pi^2+4}}{4}$ に一致するとき

$$1-\frac{1}{e^a}=\frac{1}{2} \quad \therefore \quad \boxed{e^a=\log 2}$$

$\boxed{2}$

(1) $\begin{cases} \log_{10}2.6 = \log_{10}\dfrac{5.2}{2} = \log_{10}5.2 - \log_{10}2 \\ \log_{10}2.6 = \log_{10}1.3 \times 2 = \log_{10}1.3 + \log_{10}2 \end{cases}$ が与えられており，$\log_{10}2.6$ を 2 通りで評価する問題.

(2) 7^{289} の桁数は $\boxed{}$，下 2 桁の数は $\boxed{}$，最高位とその次の位の数は $\boxed{}$.

$\log_{10}2 = 0.3010$，$\log_{10}3 = 0.4771$，$\log_{10}7 = 0.8451$，$\log_{10}11 = 1.0414$，
$\log_{10}13 = 1.1139$ $\log_{10}17 = 1.230$，$\log_{10}19 = 1.279$ (※表で与えられていた)

(2) $\log_{10}7^{289} = 289\log_{10}7 = 289 \times 0.8451 = 244.2339$ $\therefore$ $7^{289} = 10^{244.2339}$

$10^{244} \leqq 7^{289} < 245$ であるから 7^{289} は $\boxed{245\text{ 桁}}$

また，$7^{289} = 10^{1.2339} \times 10^{243}$ であり，

$$\begin{cases} \log_{10}17 = 1.230 \\ \log_{10}18 = 2\log_{10}3 + \log_{10}2 = 1.2552 \end{cases}$$

であるから，$17 \leqq 10^{1.239} < 18$ となるので 7^{289} の最高位とその次の位の数は $\boxed{17}$

以下，100 を法として考える.

$$7^2 \equiv 49,\quad 7^3 = 343 \equiv 43,\quad 7^4 = 7^3 \cdot 7 \equiv 43 \cdot 7 = 301 \equiv 1$$

であるから，

$7^{289} = (7^4)^{72} \cdot 7 \equiv 1^{72} \cdot 7 = 7$ よって，7^{289} の下 2 桁の数は $\boxed{07}$

3

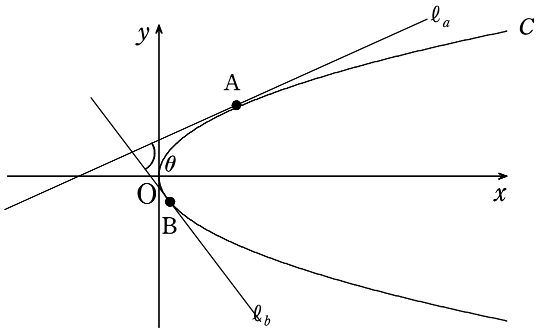
曲線 C を $C: y^2=2x$ とする．

(1)　C 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{9}{2},\ 3\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{8},\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線の交点を P とする．

P($\boxed{}$, $\boxed{}$) であり，$\angle\mathrm{APB}=\boxed{\text{ア}}\ \pi$ である．

(2)　C 上の点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{a^2}{2},\ a\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{b^2}{2},\ b\right)$ における接線の交点 P は P($\boxed{}$, $\boxed{}$) である．このとき点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とする．ただし，$a>b$ とする．

(3)　$a,\ b$ を $\angle\mathrm{APB}=\boxed{\text{ア}}\ \pi$ を満たしながら動かすとき，X の最小値は $\boxed{}$ であり，点 P は双曲線 $\dfrac{x^2}{\boxed{}}-\dfrac{y^2}{\boxed{}}=1$ を x 軸方向に $\boxed{}$ 平行移動したものの一部を表す．



(2)　C 上の点 A，B における接線を ℓ_a，ℓ_b とする．$y^2=2x$ より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{y}$ $(y\neq 0)$

よって，

$$\ell_a: y=\frac{1}{a}\left(x-\frac{a^2}{2}\right)+a \qquad \therefore\quad \ell_a: y=\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}$$

同様に　$\ell_b: y=\dfrac{1}{b}x+\dfrac{b}{2}$

ℓ_a，ℓ_b の交点の x 座標は，

$$\frac{1}{a}x+\frac{a}{2}=\frac{1}{b}x+\frac{b}{2}$$

$$\frac{b-a}{ab}x=-\frac{1}{2}(a-b)$$

$a\neq b$ であるから　$x=\dfrac{ab}{2}$

このとき，$y=\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{ab}{2}+\dfrac{a}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

以上から，$\mathrm{P}\left(\dfrac{ab}{2},\ \dfrac{a+b}{2}\right)$

ここで，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\frac{a-b}{2}\begin{pmatrix}-b\\-1\end{pmatrix}$$

であり，$\vec{v}=\begin{pmatrix}a\\1\end{pmatrix}$，$\vec{u}=\begin{pmatrix}-b\\-1\end{pmatrix}$ とする．

$$|\vec{v}|=\sqrt{a^2+1},\ |\vec{u}|=\sqrt{b^2+1},\ \vec{v}\cdot\vec{u}=-ab-1$$

であるから，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{\vec{v}\cdot\vec{u}}{|\vec{v}||\vec{u}|}=\frac{-ab-1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}\ \cdots ①$$

(1)　① において，$a=3,\ b=\dfrac{1}{2}$ とすると，

$$\cos\theta=\frac{-\frac{3}{2}-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{\frac{5}{4}}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\therefore\ \boxed{\angle\mathrm{APB}=-\frac{3}{4}\pi}$$

また，P の座標は $\boxed{\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{7}{4}\right)}$

(3)　① で $\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ とすると，

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{-ab-1}{\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}}$$

$$\sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}=\sqrt{2}(ab+1)$$

両辺正であるから 2 乗すると，

$$(a^2+1)(b^2+1)=2(ab+1)^2$$

$$(a+b)^2+(ab)^2-6ab-2=0\ \cdots ②$$

また，点 $\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおくとき，

$$\begin{cases}X=\dfrac{ab}{2}\\[2mm] Y=\dfrac{a+b}{2}\end{cases}\qquad\therefore\ \begin{cases}ab=2X\\ a+b=2Y\end{cases}$$

このとき，$2X,\ 2Y$ は 2 次方程式 $t^2-2Yt+2X=0$ の解であるから，

$$Y^2-2X\geqq 0\qquad\therefore\ Y^2\geqq 2X\ \cdots (※)$$

この条件の下で，② から

$$(2Y)^2+(2X)^2-6\cdot 2X-2=0\qquad\therefore\ \frac{\left(X+\frac{3}{2}\right)^2}{2}-\frac{Y^2}{2}=1$$

したがって点 P の軌跡は，双曲線 $\boxed{\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1}$ を x 軸方向に $\boxed{-\dfrac{3}{2}}$ だけ平行移動したものの

(※) の範囲

$\boxed{4}$

(1)　点A，Bは格子点とし，A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ とする． (i)　三角形 OAB の面積が最小となるとき，$\lvert a_1b_2-a_2b_1\rvert=\boxed{}$ である． (ii)　$\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ で表される点 P が格子点であるとき，$m,\ n$ が整数であること を示せ． (2)　4 点 O，A，B，C は格子点とし，これら 4 つの点で作られる凸四角形の面積が最小となるときを考える． (i)　四角形 OABC の周および内部に含まれる格子点が O，A，B，C 以外に存在しないことを示せ． (ii)　この四角形が平行四辺形であることを示せ．

注　$a,\ b$ を 0 でない整数とする．このとき，

$a,\ b$ は互いに素な整数 $\Leftrightarrow ax+by=1$ が整数解をもつ

ということを既知として答案で用いた．

(1)(i)　$(\triangle OAB)=\dfrac{1}{2}\lvert a_1b_2-a_2b_1\rvert$ であり，$a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2$ は整数であるから $\lvert a_1b_2-a_2b_1\rvert$ も整数である．$\lvert a_1b_2-a_2b_1\rvert=0$ とすると，$\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}$ となり 3 点 O，A，B が一直線上に並ぶので三角形が作られない．

$\lvert a_1b_2-a_2b_1\rvert=1$ とすると，$a_1b_2-a_2b_1=\pm1$

このような点 A $(a_1,\ a_2)$，B $(b_1,\ b_2)$ をとることができるので，$\lvert a_1b_2-a_2b_1\rvert$ の最小値は $\boxed{1}$

(ii)　格子点 P$(p,\ q)$ が $m,\ n$ を用いて $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ と表せるとき，

$$\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=m\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}+n\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}\qquad\therefore\ \begin{cases}p=a_1m+b_1n & \cdots①\\ q=a_2m+b_2n & \cdots②\end{cases}$$

①$\times a_2-$②$\times a_1$から，

$$(a_2-a_1)p=(a_2b_1-a_1b_2)n$$

ここで(i)から $a_2b_1-a_1b_2=\pm1$ であるから，$n=\pm(a_2-a_1)p$ となり n は整数である．

同様に，①$\times a_2-$②$\times a_1$ から m が整数であることが示される．

(2)(i)　四角形OABC の面積が最小となるのは，△OAB の面積と△ OBC の面積が最小となるときである．(このような点A，B，C は $\boxed{注}$ より必ずとることができる)

このとき，△OAB の周および内部に格子点 P が含まれているとすると，(1) の議論から整数 $m,\ n$ を用いて $\overrightarrow{OP}=m\overrightarrow{OA}+n\overrightarrow{OB}$ と表せる．また，△OAB の周および内部に含まれるので，

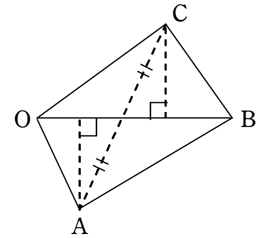
$$0\leqq m+n\leqq1,\ 0\leqq m\leqq1,\ 0\leqq n\leqq1$$

であるから，$(m,\ n)=(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$ となり点 P はO，A，B のいずれかに一致する．

△OBC でも同様に議論でき，O，B，C のいずれかに一致する．

(ii)　4 つので作られる四角形 OABC を考える．

四角形 OABC の面積を右図のように △OAB の面積と△OBC の面積の和と考えたとき，(1) よりどちらの三角形の面積も $\dfrac{1}{2}$ となることから，直線 OB から等距離の位置に点 A，C がある．したがって，線分 AC の中点は OB 上に存在する．



四角形 OABC の面積を △ABC の面積と△OAC の面積の和と考えたときも同様の議論から OB の中点がAC 上に存在することがわかる．四角形 OABC の 2 本の対角線は各々の中点で交わることから四角形OABC は平行四辺形である．(他の四角形も同様)