2023 帝京大学【1日目】（数学再現）2023/1/26 実施　2科目120分

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

※第三者のチェックをしていないため誤りを含む場合があります．あくまで参考程度にしてください．

$\boxed{1}$

(1)　関数 $y=2x^2-3x+4$ のグラフを C とする．点 $\left(1,\ -\dfrac{1}{8}\right)$ から C に接線を引くとき，C の接点の x 座標が正となる接点は ($\boxed{}$，$\boxed{}$) である．

(2)　p は 0 でない実数とする．$f(x)$ は3次関数であり，

$$f'(p)=f'(2p)=\frac{p^2}{3}\qquad f(p)=f(2p)=0\qquad f(p+1)=ap^2+bp+c$$

が成り立つとき，$a=\boxed{}$，$b=\boxed{}$，$c=\boxed{}$ である．

(1)　接点の座標を $(t,\ 2t^2-3t+4)$ とする．この点における接線の方程式は，

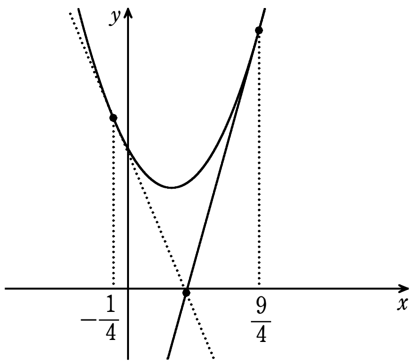
$$y=(4t-3)(x-t)+2t^2-3t+4$$

であり，この接線が点 $\left(1,\ -\dfrac{1}{8}\right)$ を通るとき，

$$-\frac{1}{8}=(4t-3)(1-t)+2t^2-3t+4$$

$$16t^2-32t-9=0 \Leftrightarrow (4t-9)(4t+1)=0$$

$$\therefore\quad t=\frac{9}{4},\ -\frac{1}{4}$$



接点の x 座標が正となるとき $t=\dfrac{9}{4}$ である．このとき，

$$y=2\left(\frac{9}{4}\right)^2-3\cdot\frac{9}{4}+4=\frac{59}{8}$$

以上から求める接点は $\boxed{\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{59}{8}\right)}$

(2)　$f(p)=f(2p)=0$ より，$f(x)$ は

$$f(x)=(Ax+B)(x-p)(x-2p)$$

とおける．このとき，

$$f'(x)=A(x-p)(x-2p)+(Ax+B)\cdot1\cdot(x-2p)+(Ax+B)(x-p)\cdot1$$

であるから，$f'(p)=f'(2p)=\dfrac{p^2}{3}$ より，

$$\begin{cases} f'(p)=-p(Ap+B)=\dfrac{p^2}{3} \\ f'(2p)=(2Ap+B)p=\dfrac{p^2}{3} \end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases} Ap+B=-\dfrac{p}{3} \\ 2Ap+B=\dfrac{p}{3} \end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases} A=\dfrac{1}{3} \\ B=-p \end{cases}$$

以上から，

$$f(p+1)=\left\{\frac{1}{3}(p+1)-p\right\}\cdot1\cdot(-p+1)=\frac{2}{3}p^2-p+\frac{1}{3}$$

よって　$\boxed{a=\dfrac{2}{3},\ b=-1,\ c=\dfrac{1}{3}}$

2

> (1) 実数 $x,\ y$ は
>
> $$\begin{cases} \cos x+\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin x+\cos y=\dfrac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \quad \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}\right)$$
>
> を満たすとする．このとき，$\sin(x+y)=\boxed{}$ であり，$x=\boxed{}$，$y=\boxed{}$ である．
>
> (2) $\vec{a},\ \vec{b}$ が $|\vec{a}-2\vec{b}|=1,\ |-2\vec{a}+7\vec{b}|=1$ を満たすとき，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\boxed{}$，最小値は $\boxed{}$ である．

(1)

$$\begin{cases} \cos x+\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \cdots① \\ \sin x+\cos y=\dfrac{\sqrt{6}}{2} & \cdots② \end{cases}$$

より　　$\sin y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos x,\ \cos y=\dfrac{\sqrt{6}}{2}-\sin x$

このとき，$\sin^2 y+\cos^2 y=1$ から

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos x\right)^2+\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\sin x\right)^2=1$$

$$\left(\frac{2}{4}-\sqrt{2}\cos x+\cos^2 x\right)+\left(\frac{6}{4}-\sqrt{6}\sin x+\sin^2 x\right)=1$$

$$\sqrt{6}\sin x+\sqrt{2}\cos x=2$$

$$2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=2 \qquad \therefore\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ここで，$-\dfrac{\pi}{3}<x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{2\pi}{3}$ であるから　　$x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{4}$　　$\therefore$ $\boxed{x=\dfrac{\pi}{12}}$

また，$①^2+②^2$ より

$$(\cos^2 x+2\cos x\sin y+\sin^2 y)+(\sin^2 x+2\sin x\cos y+\cos^2 y)=\frac{2}{4}+\frac{6}{4}$$

$$2+2\sin(x+y)=2 \qquad \therefore\ \boxed{\sin(x+y)=0}$$

ここで，$-\pi<x+y<\pi$ であるから　　$x+y=0$　　$\therefore$ $y=-x=\boxed{-\dfrac{\pi}{12}}$

(2) $\vec{c}=\vec{a}-2\vec{b},\ \vec{d}=-2\vec{a}+7\vec{b}$ とすると

$$\vec{a}=\frac{7}{3}\vec{c}+\frac{2}{3}\vec{d},\ \vec{b}=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}$$

であり，$|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ であるから，

$$\begin{aligned} |\vec{a}+\vec{b}|^2&=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2 \\ &=\frac{1}{9}|7\vec{c}+2\vec{d}|^2+\frac{2}{9}(7\vec{c}+2\vec{d})\cdot(2\vec{c}+\vec{d})+\frac{1}{9}|2\vec{c}+\vec{d}|^2 \\ &=\frac{1}{9}\{(49|\vec{c}|^2+28\vec{c}\cdot\vec{d}+4|\vec{d}|^2)+2(14|\vec{c}|^2+11\vec{c}\cdot\vec{d}+2|\vec{d}|^2)+(4|\vec{c}|^2+4\vec{c}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2)\} \\ &=\frac{1}{9}(90+54\vec{c}\cdot\vec{d}) \end{aligned}$$

$-1\leqq\vec{c}\cdot\vec{d}\leqq 1$ であるから　　$\dfrac{1}{9}(90-54)\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq\dfrac{1}{9}(90+54)$　　$\therefore$ $4\leqq|\vec{a}+\vec{b}|^2\leqq 16$

よって，$|\vec{a}+\vec{b}|$ の最大値は $\boxed{4}$，最小値は $\boxed{2}$

$\boxed{3}$

(1) 赤，青，黄色の3つのサイコロがある．これら3つのサイコロを同時に投げるとする． （i） 出た目の中に1が含まれる確率は $\boxed{}$ （ii） 出た2つの目の積が残りの出た目と等しい確率は $\boxed{}$ （iii） 出た目の平均が整数であり，分散が2となる確率は $\boxed{}$ (2) $n=2310$ とする． （i） n の正の約数の個数は $\boxed{}$ 個 （ii） 正の整数 a, b に対し， a と b の最小公倍数が n になる a, b の組合せは $\boxed{}$ 通り．ただし，組 $(a,\ b)$ と組 $(b,\ a)$ は異なるものとする．

(1)（i） 3つのサイコロを投げて，1つも1の目が出ない確率は $1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^3=\boxed{\dfrac{91}{216}}$

（ii） 2つの目の積が残りの目に一致するような目の組合せは，

$(1,\ 1,\ 1)$, $(1,\ 2,\ 2)$, $(1,\ 3,\ 3)$, $(1,\ 4,\ 4)$, $(2,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 5,\ 5)$, $(1,\ 6,\ 6)$, $(2,\ 3,\ 6)$

があり，求める確率はそれぞれの順列を考えることで，

$$\frac{1+\dfrac{3!}{2!}\times 6+3!}{216}=\boxed{\frac{25}{216}}$$

（iii） サイコロの目を a, b, c ($a\leqq b\leqq c$)とする．このとき，出た目の平均は $\dfrac{a+b+c}{3}$ であり，条件から自然数

n を用いて $n=\dfrac{a+b+c}{3}$ とおく．

ここで，分散が2であることから，

$$\frac{1}{3}\{(a-n)^2+(b-n)^2+(c-n)^2\}=2 \qquad \therefore \quad (a-n)^2+(b-n)^2+(c-n)^2=6$$

また， $a-n$, $b-n$, $c-n$ はいずれも整数値を取るので， $a-n$, $b-n$, $c-n$ の組合せは，

$(a-n,\ b-n,\ c-n)=(-2,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 1,\ 2)$

であり，

$(a,\ b,\ c)=(n-2,\ n+1,\ n+1),\ (n-1,\ n+1,\ n+2)$

となる．このとき， $a+b+c=3n$ となり3つの目の平均は必ず整数値をとることがわかる．

$a+b+c$ が3の倍数となる目の組合せは，1から6の目を3で割った余りで

X: 1, 4 (余り1)　　Y: 2, 5 (余り2)　　Z: 3, 6 (余り0)

のように分類すると，

$(a,\ b,\ c)=(X,\ X,\ X),\ (Y,\ Y,\ Y),\ (Z,\ Z,\ Z),\ (X,\ Y,\ Z)$

この中で $a\leqq b\leqq c$ となるものを考えて，

$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 4),\ (1,\ 4,\ 4),\ (2,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 5),\ (3,\ 3,\ 6),\ (3,\ 6,\ 6)$

だけあり， a, b, c の大小関係をなくすことで求める確率は，

$$\frac{6\times\dfrac{3!}{2!}}{216}=\frac{3}{36}=\boxed{\frac{1}{12}}$$

(2)（i） $n=2\times 3\times 5\times 7\times 11$ であるから， n の正の約数の個数は $2\times 2\times 2\times 2\times 2=\boxed{32\text{個}}$

（ii） a, b の最小公倍数が n になることから，

$$\begin{cases} a=2^{a_1}\times 3^{b_1}\times 5^{c_1}\times 7^{d_1}\times 11^{e_1} \\ b=2^{a_2}\times 3^{b_2}\times 5^{c_2}\times 7^{d_2}\times 11^{2_2} \end{cases}$$ （$i=1,\ 2$ とする． a_i, b_i, c_i, d_i, e_i は0, 1いずれかの整数）

と表せ，素因数 2 に着目すると，

$$(a_1,\ b_1)=(1,\ 0),\ (0,\ 1),\ (1,\ 1)$$

の 3 通りある．他の素因数でも同様に考えられるので　$3^5=\boxed{243\text{ 通り}}$

$\boxed{4}$

(1) 関数 $f(x)$ を $f(x)=3^{3x+1}-42\cdot 3^{2x-1}+3^{x+1}\quad (x\leqq \log_3 4)$ とする．$f(x)$ は $x=\boxed{}$ のとき，最大値$\boxed{}$，最小値$\boxed{}$ をとる．
(2) $\log_2 10^5$ の整数部分は$\boxed{}$ である．$\log_2 10^2$，$\log_2 10^3$，$\log_2 10^5$ の小数部分をそれぞれ a，b，c とするとき， $2a+7b-5c=\boxed{}$ である．

(1) $t=3^x$ とすると　$f(x)=3t^3-12t^2+3t$ ($=g(t)$ とする)

$$g'(t)=(9t-1)(t-3)$$

であり，$x\leqq \log_3 4$ から $0<t\leqq 4$ であるから，この下で $g(t)$ は $t=\dfrac{1}{9}$ で最大，$t=3$ で最小となる．

したがって，$f(x)$ は $\boxed{x=-2}$ で$\boxed{最大値\ \dfrac{40}{243}}$，$\boxed{最小値\ -20}$

(2)

2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}	2^{13}	2^{14}	2^{15}	2^{16}	2^{17}
64	128	256	512	1024	2048	4096	8192	16384	32768	65536	131072

上の表から，

$2^{16}<10^5<10^{17}\qquad \therefore\ \left[\log_2 10^5\right]=\boxed{16}$

$2^6<10^2<2^7\qquad \therefore\ \left[\log_2 10^2\right]=6$

$2^9<10^3<2^{10}\qquad \therefore\ \left[\log_2 10^3\right]=9$

よって，

$$\begin{cases} a=\log_2 10^2-6 \\ b=\log_2 10^3-9 \\ c=\log_2 10^5-16 \end{cases}$$

したがって，

$$2a+7b-5c=(4\log_2 10-12)+(21\log_2 10-63)-(25\log_2 10-80)=\boxed{5}$$