2023 愛知医科大学（数学再現）2023/1/24 実施 80分

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

※第三者のチェックをしていないため誤りを含む場合があります．あくまで参考程度にしてください．

$\boxed{1}$

(1)　関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする．$f'(x)=\boxed{\quad}$

(2)　$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\,dx=\boxed{\quad}$ ．

(3)　$\sin\dfrac{\pi}{24}+\sin\dfrac{7\pi}{24}=\boxed{\quad}$

(4)　n を 4 以上の偶数とする．正 n 角形の頂点を結んでできる三角形を考える．

（4−1） 直角三角形の個数を求めよ．

（4−2） 鈍角三角形の個数を求めよ．

（4−3） 鋭角三角形の個数を求めよ．

(5)　数列

$$1,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ 1,\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots\cdots$$

について次の問に答えよ．

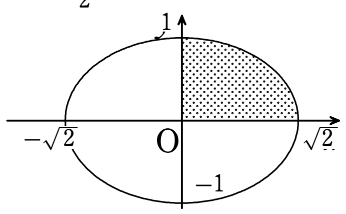
（5−1） $\dfrac{5}{8}$ は第何項か．

（5−2） 第 200 項の数を求めよ．

（5−3） 初項から第 200 項までの和を求めよ．

(1)　$\boxed{f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}}$

(2)　$y=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{2}}$ とすると，$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1\ (y\geqq 0)$



$\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\,dx$ は楕円 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$ と x 軸，y 軸とで囲まれる部分の面積を表すので，

$$\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1-\frac{x^2}{2}}\,dx=\frac{1}{4}\cdot\pi\sqrt{2}\cdot 1=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{4}\pi}$$

(3)　$\sin\dfrac{\pi}{24}+\sin\dfrac{7\pi}{24}=2\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{8}$

であり，

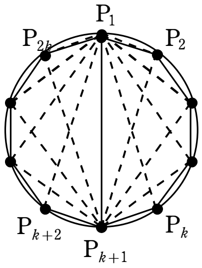
$$\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}\qquad\therefore\quad\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}$$

であるから，

$$\sin\frac{\pi}{24}+\sin\frac{7\pi}{24}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}=\boxed{\frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}}$$

(4)　$n=2k$ $(k \geqq 2)$ とし，正 $2k$ 角形の各頂点を P_1，P_2，P_3，$\cdots$，P_{2k} とする．

（4－1）　線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_{k+1}$ を斜辺とする直角三角形を考える．

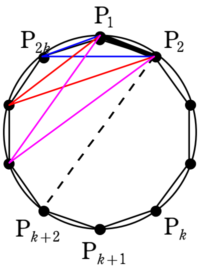


残りの点の選び方は，P_1，P_2，$\cdots$，P_k，P_{k+2}，P_{k+3}，$\cdots$，P_{2k} の $(2k-2)$ 通りある．

直径を含む k 本の線分で同様に考えられるので，直角三角形は，

$$k\times(2k-2)=\boxed{\frac{n(n-2)}{2}\text{ 個}}$$

（4－2）　点 P_1 が鈍角となる三角形を考える．



$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を含み点 P_1 が鈍角となる三角形は，残りの点を P_{k+3}，P_{k+4}，$\cdots$，P_{2k} の $(k-2)$ 個の中から選べばよい．

同様に $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$ の場合は，残りの点を P_{k+4}，P_{k+5}，$\cdots$，P_{2k} の $(k-3)$ 個の中から選べばよい．

したがって，点 P_1 が鈍角になる三角形は，

$$1+2+\cdots+(k-2)=\frac{1}{2}(k-2)(k-1)$$

個だけ作られる．他の頂点のときも同様であるから，鈍角三角形は，

$$2k\times\frac{1}{2}(k-1)(k-2)=\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)=\boxed{\frac{n(n-2)(n-4)}{8}\text{ 個}}$$

（4－3）　正 $2k$ 角形から 3 つの頂点を選んでできる三角形は，

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6}\text{ 個}$$

だけあるので，鋭角三角形は，

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n(n-2)}{2}-\frac{n(n-2)(n-4)}{8}=\boxed{\frac{n(n-2)(n-4)}{24}\text{ 個}}$$

(5)　与えられた数列を次のように第 k 群には $k+1$ 項の数が入るように群に分けて考える．

$$\overset{\boxed{1}}{1,\ \frac{1}{2},}\ \Big|\ \overset{\boxed{2}}{1,\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3}}\ \Big|\ \overset{\boxed{3}}{1,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}}\ \Big|\ 1,\ \frac{1}{5},\ \cdots\cdots\cdots$$

このとき，

$$\sum_{l=1}^{k}(l+1)=\frac{1}{2}k\{2+(k+1)\}=\frac{1}{2}k(k+3)$$

であるから，第 k 群の末項はこの数列の第 $\frac{1}{2}k(k+3)$ 項である．

（5－1） 第 k 群に含まれる数は次のようになっている.

$$1,\ \frac{1}{k+1},\ \frac{2}{k+1},\ \frac{3}{k+1},\ \cdots\cdots,\ \frac{k}{k+1}$$

したがって，$\frac{5}{8}$ は第 7 群の 6 番目の数であるから $\frac{5}{8}$ はこの数列の

$$\frac{1}{2}\cdot 6\cdot(6+3)+6=\boxed{33\text{項}}$$

（5－2） 第 200 項が第 m 群に属しているとすると,

$$\frac{1}{2}(m-1)(m+2)<200\leqq\frac{1}{2}m(m+3)$$

を満たしており，$\frac{1}{2}\cdot 18\cdot 21=189$，$\frac{1}{2}\cdot 19\cdot 22=209$ であるから $m=19$

第 18 群の末項は第 189 項 であるから，第 200 項は第 19 群の $200-189=11$ 番目の数である.

以上から第 200 項は $\boxed{\frac{10}{20}}$ である.

（5－3） 第 k 群に含まれる数の総和は,

$$1+\frac{1}{k+1}+\frac{2}{k+1}+\cdots+\frac{k}{k+1}=\frac{1+2+\cdots+(k+1)}{k+1}=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{1}{2}(k+1)(k+2)=\frac{k+2}{2}$$

であるから，この数列の初項から第 200 項までの和は,

$$\sum_{k=1}^{18}\left(\frac{k+2}{2}\right)+\left\{1+\frac{1}{20}+\frac{2}{20}+\cdots+\frac{10}{20}\right\}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 18(3+20)+1+\frac{1}{20}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 11=\boxed{\frac{429}{4}}$$

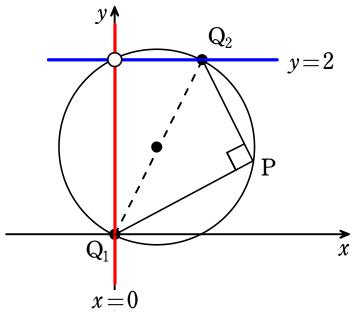
2

xy 平面上の 2 直線 $\ell_1: mx-y=0$, $\ell_2: x+my-2m-1=0$ の交点を P とし, m が任意の実数をとるとき点 P の軌跡が描く曲線を C とする. C と ℓ_1, ℓ_2 の交点をそれぞれ Q_1, Q_2 とする. (1) 点 P の軌跡を求めよ. (2) $\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2$ が最大となるときの m の値を求めよ.

(1) ℓ_1, ℓ_2 に関して, $m\cdot 1+(-1)m=0$ であるから, $\ell_1 \perp \ell_2$ である.

また, $\ell_1: mx-y=0$ より ℓ_1 は点 $(0,\ 0)$ を通る直線のうち $x=0$ を除くもの全体を表し,

$\ell_2: x-1+m(y-2)=0$ より ℓ_2 は点 $(1,\ 2)$ を通る直線のうち $y=2$ を除くもの全体を表す.



よって, 点 P の軌跡は 2 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$ を直径とする円のうち点 $(0,\ 2)$ を除いたもの.

(2) (1) から $\mathrm{Q}_1(0,\ 0)$, $\mathrm{Q}_2(1,\ 2)$ である. $\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2>0$ であるから,

$$\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2 \text{ が最大} \Leftrightarrow (\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2)^2 \text{ が最大}$$

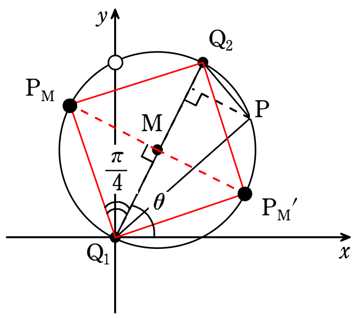
である. ここで,

$$(\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2)^2=(\mathrm{PQ}_1{}^2+\mathrm{PQ}_2{}^2)+2\mathrm{PQ}_1\cdot\mathrm{PQ}_2=\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2{}^2+4(\triangle\mathrm{PQ}_1\mathrm{Q}_2)$$

となり, $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2{}^2$ は定数であるから,

$$\mathrm{PQ}_1+\mathrm{PQ}_2 \text{ が最大} \Leftrightarrow (\triangle\mathrm{PQ}_1\mathrm{Q}_2) \text{ が最大}$$

$(\triangle\mathrm{PQ}_1\mathrm{Q}_2)$ が最大となるのは, 点 P と線分 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ の距離が最大となるときである. このとき, 右図のように点 M, $\mathrm{P_M}$, $\mathrm{P_M}'$ を設定し, 直線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2$ と x 軸のなす角を θ とする. $\triangle\mathrm{P_M Q_1 Q_2}$, $\triangle\mathrm{P_M' Q_1 Q_2}$ は直角二等辺三角形であるから, $\angle\mathrm{Q_1 P_M Q_2}=\angle\mathrm{Q_1 P_M' Q_2}=\dfrac{\pi}{4}$



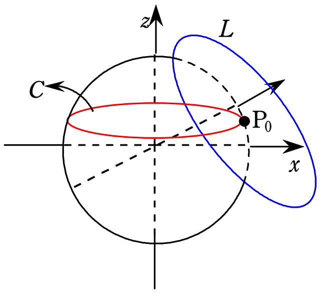
ここで, $\tan\theta=2$ から

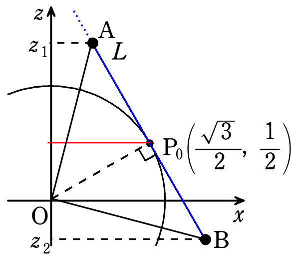
$$m=\tan\left(\theta\pm\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\theta\pm\tan\frac{\pi}{4}}{1\mp\tan\theta\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{2\pm1}{1\mp2} \text{ (複号同順)} \qquad \therefore \boxed{m=\frac{1}{3},\ -3}$$

$\boxed{3}$

xyz 空間上に原点中心，半径 1 の球面 K がある． K と $z=\dfrac{1}{2}$ の共通部分にできる円を C とし， C 上の点 P を中心とする半径 1 の円板 L が K に接しているとする． (1) C 上の点 $\mathrm{P_0}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ において L が K に接しているとき， L 上に存在する点の z 座標がとり得る値の範囲を $z_1 \leqq z \leqq z_2$ とする． z_1 と z_2 を求めよ． (2) 平面 $z=t\ (z_1 \leqq t \leqq z_2)$ による L の切り口と z 軸との距離の最小値 d を求めよ． (3) 点 P が C 上を 1 周するとき， L が通過してできる部分と $z=z_1$， $z=z_2$ とで囲まれてできる立体の体積を求めよ．

(1) zx 平面に射影した図は次の右図になる．



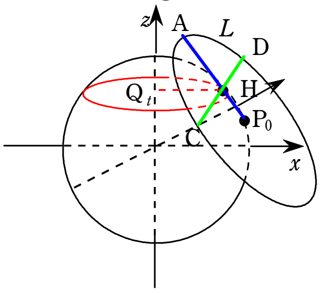


L 上の端点を A，B とすると， $\angle \mathrm{AOP_0} = \angle \mathrm{P_0OB} = \dfrac{\pi}{4}$， $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\sqrt{2}\,\mathrm{OP_0}=\sqrt{2}$ であるから，

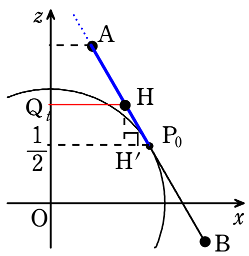
$$z_1 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{1-\sqrt{3}}{2}} \qquad z_2 = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right) = \boxed{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

(2) $\mathrm{Q}_t(0,\ 0,\ t)$とする．平面 $z=t$ と L の共通部分は，次の【Fig I】における線分 CD である．

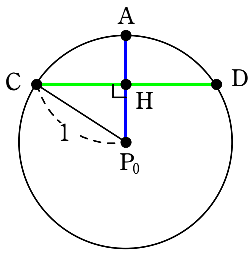
【Fig I】



【FigⅡ】



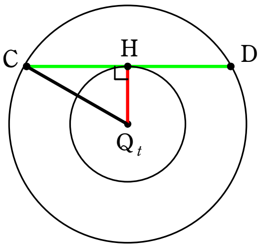
【FigⅢ】



zx 平面上に射影した図【FigⅡ】において， L は直線 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+\dfrac{1}{2}z=1$ すなわち $x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2-z)$ と表せるので，

最短距離 d は $d=\mathrm{Q}_t\mathrm{H}=\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{3}}(2-t)}$

(3) 線分 CD を z 軸の回りに 1 回転させてできる図形の面積を $S(t)$ とする． z 軸と線分 CD の最大距離を D とすると $D=\mathrm{Q}_t\mathrm{C}$ であり，



$$S(t)=\pi D^2-\pi d^2=\pi(\mathrm{Q}_t\mathrm{C}^2-\mathrm{Q}_t\mathrm{H}^2)=\pi\mathrm{CH}^2$$

【FigⅡ】において H から $z=\dfrac{1}{2}$ に下ろした垂線の足を H′ とすると　HH′$=\left|t-\dfrac{1}{2}\right|$

また，$\angle \mathrm{HP_0H'}=\dfrac{\pi}{3}$ であるから　$\mathrm{HP_0}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left|t-\dfrac{1}{2}\right|$

【FigⅢ】において

$$\mathrm{CH}^2=1-\mathrm{HP_0}^2=1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2$$

以上から求める立体の体積は,

$$\int_{z_1}^{z_2}S(t)dt=\int_{z_1}^{z_2}\left\{1-\frac{4}{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\right\}\pi dt$$

$$=\left[t-\frac{4}{9}\left(t-\frac{1}{2}\right)^3\right]_{z_1}^{z_2}\pi$$

$$=\left\{\sqrt{3}-\frac{4}{9}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3+\frac{4}{9}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3\right\}\pi$$

$$=\boxed{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$$