2024 岩手医科大（数学再現）2024/1/17 実施　英数 120 分

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

※第三者のチェックを受けていないので誤りを含む可能性があります

1

n を整数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=n(\log_2 x)^2+12\log_2 x+n+6$ とする．

(1)　$n=4$ のとき，$f(x)$ は $x=$□ で最小値□ をとる．

(2)　$f(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつとき，$n=$□ である．

(3)　$f(x)=0$ が $x=2^k$（k は整数）を解にもつ n は□ 個あり，その中で最大のものは $n=$□ である．

(4)　すべての n において $f(x)=0$ の実数解の最大値は□ である．

(1)　$n=4$ のとき，$f(x)=4(\log_2 x)^2+12\log_2 x+10$（$x>0$）

$\log_2 x=X$ とすると，　$f(x)=4X^2+12X+10=4\left(X+\dfrac{3}{2}\right)^2+1$

X は実数全体を動くので，　$X=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 1 をとる．

よって，　$f(x)$ は $x=\boxed{2^{-\frac{3}{2}}}$ のとき，最小値 $\boxed{1}$ をとる．

(2)(i)　$n=0$ のとき

$$f(x)=0 \Leftrightarrow 12\log_2 x+6=0 \qquad \therefore \quad x=2^{-\frac{1}{2}}$$

となり，　$f(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもつ

(ii)　$n\neq 0$ のとき

(1) と同様に $\log_2 x=X$ とすると，　x と X は 1 対 1 に対応するので，　$f(x)=0$ がただ 1 つの実数解をもつ条件は，　$nX^2+12X+n+6=0$ がただ 1 つの実数解をもつことである．判別式を D とすると，

$$D=0 \Leftrightarrow 36-n(n+6)=0$$

$$n^2+6n-36=0 \qquad \therefore \quad n=3\pm 3\sqrt{5}$$

となり n は整数でない．以上から $\boxed{n=0}$

(3)　(2) より $n=0$ のとき $f(x)=0$ の解は $x=2^k$ とならないので，　$n\neq 0$ で考える．

$f(x)=0$ が $x=2^k$ を解にもつとき，　$nX^2+12X+n+6=0\cdots$① が少なくとも 1 つ整数解をもつので，

$$D>0 \Leftrightarrow 3-3\sqrt{5}<n<3+3\sqrt{5}$$

また，　$3<3\sqrt{5}-3<4$，　$-10<-3\sqrt{5}-3<-9$ であり，　n が整数であることから，　$-9\leqq n\leqq 3$

この下で ① の解は

$$X=\frac{-6\pm\sqrt{36-n(n+6)}}{n}\cdots②$$

である．これが整数となるには，　$36-n(n+6)$ が平方数になることが必要である．

n	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3
$36-n(n+6)$	9	20	29	36	41	44	45	44	41	29	20	9

平方数になるのは $n=-9,\ -6,\ 3$ であり，それぞれ ② に代入すると

$n=-9$ のとき，　$X=\dfrac{-6\pm 3}{-9}=\dfrac{1}{3},\ 1$

$n=-6$ のとき，　$X=\dfrac{-6\pm 6}{-6}=0,\ 2$

$n=3$ のとき，　$X=\dfrac{-6\pm 3}{3}=-1,\ -3$

となるから，① が整数解をもつ n は $\boxed{3}$ 個あり，その中で最大のものは $\boxed{n=3}$ である．

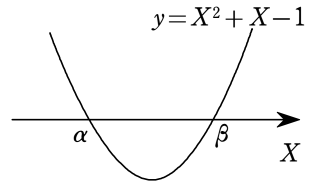
(4)　$f(x)=0 \Leftrightarrow nX^2+12X+n+6=0 \Leftrightarrow n=-\dfrac{12X+6}{X^2+1}\cdots③$

$g(X)=-\dfrac{12X+6}{X^2+1}$ とする．　$g'(X)=\dfrac{12(X^2+X-1)}{(X^2+1)^2}$ であり，　$X^2+1>0$ であるから

$g'(X)$ の符号は X^2+X-1 の符号に一致する．　$y=X^2+X-1$ のグラフは右下のようになるので，

$X^2+X-1=0$ の解 $X=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ を $\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ とおくと，

$g(X)$ の増減は次のようになる．



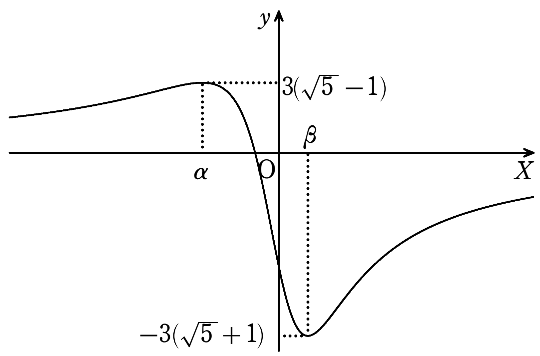
X	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(X)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(X)$	$\nearrow$	$g(\alpha)$	$\searrow$	$g(\beta)$	$\nearrow$

ここで，一般に関数 $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ が $x=\alpha$ で極値をもつとき

$$\frac{f'(\alpha)g(\alpha)-f(\alpha)g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2}=0 \qquad \therefore \quad \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}=\frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

が成り立つので，

$$\begin{cases} g(\alpha)=-\dfrac{12}{2\alpha}=\dfrac{-12}{-1-\sqrt{5}}=3(\sqrt{5}-1) \\ g(\beta)=-\dfrac{12}{2\beta}=\dfrac{-12}{\sqrt{5}-1}=-3(\sqrt{5}+1) \end{cases}$$



であり，　$\displaystyle\lim_{X\to\pm\infty} g(X)=0$ であるから，　$y=g(X)$ のグラフは右上のようになる．

$f(x)=0$ の実数解は 2 つのグラフ $y=n$ と $y=g(X)$ の共有点の X 座標であるから，　$n=-1$ のとき

X は最大になる．　$n=-1$ のとき，② から $X=6\pm 2\sqrt{11}$

以上から $f(x)=0$ の実数解のうち最大であるものは，$\boxed{x=2^{6+2\sqrt{11}}}$

2

円 $C：x^2+y^2-6x+2y+6=0$ の中心を A とする．円 D は点 B$(-1,\ 2)$ を中心とし，点 T で円 C と外接する．円 C，円 D に接する直線のうち，点 T における接線を ℓ とし，残りの 2 本の接線のうち傾きが大きいものを m，小さいものを n とする．また，接線 m，n の交点を P とし，接線 m と円 C，円 D の接点をそれぞれ Q，R とする．

(1) 円 D の半径は $\boxed{}$ であり，T の座標は $(\boxed{},\ \boxed{})$ である．

(2) QR$=\boxed{}$ であり，点 P の座標は $(\boxed{},\ \boxed{})$ である．また，直線 ℓ の方程式は $y=\boxed{}x+\boxed{}$ である．

(3) 点 R の直線 AB に関する対称点を S とすると，直線 RS の方程式は $y=\boxed{}x+\boxed{}$ である．

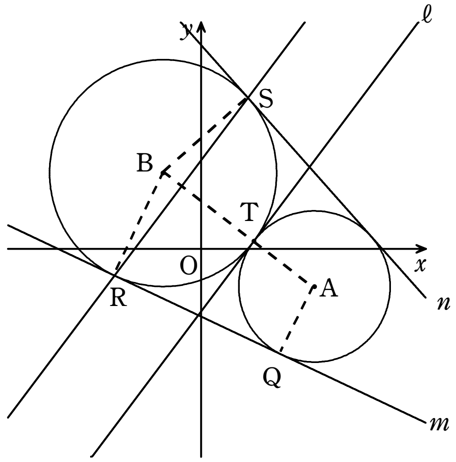
(1) $C：(x-3)^2+(y+1)^2=4$ より，C は A$(3,\ -1)$ を中心とする半径 2 の円である．AB$=5$ であり，C と D が外接するので，D の半径を r とすると

$r+2=5$　∴ $\boxed{r=3}$

AT$=2$，TB$=3$ であるから，T は線分 AB を 2：3 に内分する点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}+\frac{2}{5}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$$

よって，$\boxed{\mathrm{T}\left(\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right)}$



(2) A から BR に垂線 AH を下す．

BH$=$BR$-$HR$=$BR$-$AQ$=1$

であるから △ABH において，

AH$=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BH}^2}=2\sqrt{6}$

よって，$\boxed{\mathrm{QR}=2\sqrt{6}}$

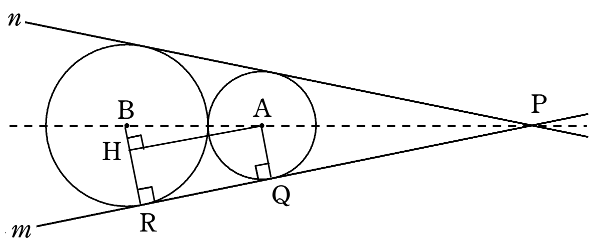
△BRP ∽ △BHA であり，相似比が 3：1 であるから，BP$=3$BA$=15$

したがって，BA：BP$=1：3$

$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3\overrightarrow{\mathrm{BA}}$

$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\begin{pmatrix}11\\-7\end{pmatrix}$

よって，$\boxed{\mathrm{P}(11,\ -7)}$



(直線 AB の傾き)$=-\frac{3}{4}$ であり，直線 ℓ は直線 AB に直交し，点 T$\left(\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right)$ を通る直線であるから，

$\ell：y=\frac{4}{3}\left(x-\frac{7}{5}\right)+\frac{1}{5}$　∴ $\boxed{\ell：\ y=\frac{4}{3}x-\frac{5}{3}}$

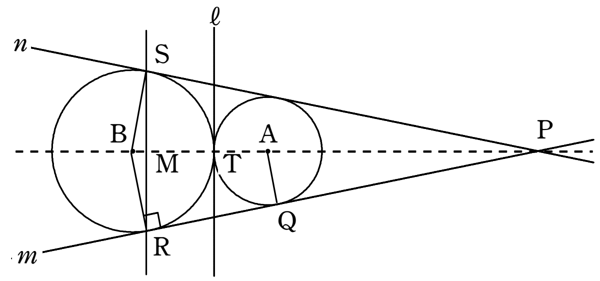
(3) SR と AB の交点を M とする．

△BPR ∽ △BRM であり，相似比は 5：1 であるから，BM$=\frac{1}{5}$BR$=\frac{3}{5}$

よって，MT$=3-\frac{3}{5}=\frac{12}{5}$

であるから，BM：MT$=1：4$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}-13\\41\end{pmatrix}$$



よって，M$\left(-\frac{13}{25},\ \frac{41}{25}\right)$ であるから，直線 SR の方程式は

$y=\frac{4}{3}\left(x+\frac{13}{25}\right)+\frac{41}{25}$　∴ $\boxed{y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}}$

参考

直線 SR は，極 P に対する極線であるから，

SR：$(11+1)(x+1)+(-7-2)(y-2)=9$　∴ $y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}$

$\boxed{3}$

袋の中にA，B，C，D，Eと書かれた球が入っている．この袋の中から3個の球を取り出し，書かれているアルファベットを確認して元に戻すという試行を繰り返す．

(1)　この試行を1回行ったとき，Aが含まれている確率は$\boxed{}$であり，A，Bがともに含まれている確率は$\boxed{}$である．

(2)　この試行を5回行ったとき，すべての試行においてAが含まれている確率は$\boxed{}$であり．すべての試行においてAもBも含まれない確率は$\boxed{}$である．

(3)　この試行を5回行ったとき，Aが3回以上連続して含まれている確率は$\boxed{}$である．

(4)　5回の試行の中で，少なくとも1回はすべての種類の球が取り出される確率は$\boxed{}$である．

(1)　1回の試行でAが含まれる確率は，$\dfrac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\boxed{\dfrac{3}{5}}$

1回の試行でA，Bともに含まれる確率は，$\dfrac{{}_3C_1}{{}_5C_3}=\boxed{\dfrac{3}{10}}$

(2)　5回の試行すべてでAが含まれる確率は，$\boxed{\left(\dfrac{3}{5}\right)^5}$

1回の試行でA，Bともに含まれない確率は，C，D，Eを取り出すと考えて，$\dfrac{1}{{}_5C_3}=\dfrac{1}{10}$

よって，5回の試行すべてでA，Bともに含まれない確率は，$\boxed{\left(\dfrac{1}{10}\right)^5}$

(3)　各回の試行において，Aが出ることを○，出ないことを×，どちらでもよいことを■で表す．

各試行において，○，×，■となる確率はそれぞれ$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，1である．

(Ⅰ)　Aが3回連続する場合，次のパターンがある．(横にその確率を記す)

1	2	3	4	5	
○	○	○	×	■	$:\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\cdot\dfrac{2}{5}\cdot 1$
×	○	○	○	×	$:\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\left(\dfrac{2}{5}\right)^2$
■	×	○	○	○	$:\left(\dfrac{3}{5}\right)^3\cdot\dfrac{2}{5}\cdot 1$

以上から，Aが3回連続する確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\cdot 1\times 2+\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2=\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot\frac{2}{5}\left(2+\frac{2}{5}\right)=\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{8}{5}$$

(Ⅱ)　Aが4回連続する場合，次のパターンがある．

1	2	3	4	5	
○	○	○	○	×	$:\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\cdot\dfrac{2}{5}$
×	○	○	○	○	$:\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\cdot\dfrac{2}{5}$

以上から，Aが4回連続する確率は，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\cdot\dfrac{2}{5}\times 2=\left(\dfrac{3}{5}\right)^4\cdot\dfrac{4}{5}$

(Ⅲ)　Aが5回連続する確率は，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^5$

(Ⅰ)～(Ⅲ)より求める確率は，

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{8}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^4\cdot\frac{4}{5}+\left(\frac{3}{5}\right)^5=\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{8}{5}+\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\boxed{3\left(\frac{3}{5}\right)^4}$$

(4)　余事象を考える．

(ⅰ)　3種類しか取り出されない場合

例えば，C，D，Eの3種類だけが取り出されるとすると，(2)からその確率は，$\left(\dfrac{1}{10}\right)^5$

他の3種類でも同様なので，${}_5C_3\times\left(\dfrac{1}{10}\right)^5=10\left(\dfrac{1}{10}\right)^5$

(ⅱ)　4種類しか取り出されない場合

例えば，B，C，D，Eの4種類だけが取り出されるとする．1回の試行でB，C，D，Eだけが取り出される(＝Aが取り出されない)確率は$\dfrac{2}{5}$であり，これが5回起きるときB，C，D，Eが出ない場合も含まれるので，B，C，D，Eの4種類が取り出される確率は，$\left(\dfrac{2}{5}\right)^5-4\left(\dfrac{1}{10}\right)^5$

他の4種類でも同様なので，${}_5C_4\times\left\{\left(\dfrac{2}{5}\right)^5-4\left(\dfrac{1}{10}\right)^5\right\}$

以上から，求める確率は，

$$1-\left\{10\left(\frac{1}{10}\right)^5+5\left(\frac{2}{5}\right)^5-20\left(\frac{1}{10}\right)^5\right\}=\boxed{1-5\left(\frac{2}{5}\right)^5+\left(\frac{1}{10}\right)^4}$$