

# 2024 愛知医科大学（数学再現）2024/1/16 実施 80 分

（受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります）

※第三者のチェックをしていないため誤りを含む場合があります．あくまで参考程度にしてください．

1

- (1) 2024 の正の約数の個数と総和を求めよ．
- (2) A, B の 2 人が勝負をして，先に 4 勝した方が勝ちとする．ただし，A, B どちらも勝つ確率は  $\frac{1}{2}$  であるとする．
- (2-1) 4 試合目で勝敗が決まる確率を求めよ．
- (2-2) 6 試合目で勝敗が決まる確率を求めよ．
- (3) 平面上の 3 点を A, B, C とし， $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$ ， $|\overrightarrow{OA}| = 4$ ， $|\overrightarrow{OB}| = 5$ ， $|\overrightarrow{OC}| = 6$  をみたしている．
- (3-1) 内積  $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$  を求めよ．
- (3-2) 三角形 ABC の面積を求めよ．
- (4)  $a$  を正の定数とし，関数  $f(x)$  を  $f(x) = \sqrt{x^2 + a} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$  とする．
- (4-1) 導関数  $f'(x)$  を求めよ．
- (4-2) 関数  $f(x)$  が極大値をもつような定数  $a$  の値の範囲を求めよ．
- (4-3) (4-2) のとき， $f(x)$  の極大値と極小値を求めよ．

- (1)  $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$  であるから，2024 の正の約数の個数は  $(1+3) \cdot (1+1) \cdot (1+1) = \boxed{16}$  個  
また，それらの総和は  $(1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23) = \boxed{4320}$

- (2) (2-1) 4 試合目で勝敗が決まるのは，どちらかが 4 連勝する場合だから  $2 \left( \frac{1}{2} \right)^4 = \boxed{\frac{1}{8}}$

- (2-2) 6 試合目で A が勝つ場合を考える．

この場合，1～5 試合目までで A が 3 勝，B が 1 勝して 6 試合目で A が勝つときである．

$$\text{その確率は } {}_5C_3 \left( \frac{1}{2} \right)^5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$$

$$\text{B が勝つ場合も同様であるから，求める確率は } 2 \times \frac{5}{32} = \boxed{\frac{5}{16}}$$

- (3) (3-1)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$  から

$$|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |-\overrightarrow{OC}|$$

両辺 2 乗して，

$$|\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 = |\overrightarrow{OC}|^2$$

$$16 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 25 = 36 \quad \therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{-\frac{5}{2}}$$

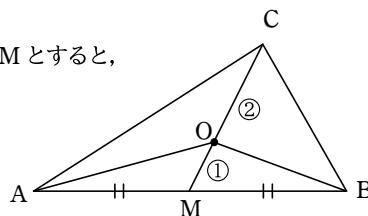
- (3-2)  $\overrightarrow{OC} = -2 \left( \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right)$  であるから，直線 OC と直線 AB の交点を M とすると，

$$\overrightarrow{OC} = -2\overrightarrow{OM} \text{ であるから } OM : OC = 1 : 2$$

三角形 ABC の面積を  $S$  とすると，

$$(\triangle OAB) = \frac{1}{3}S, (\triangle OBC) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}S = \frac{1}{3}S, (\triangle OCA) = \frac{1}{3}S$$

$$\text{であるから，} S = 3(\triangle OAB) = 3 \times \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \boxed{\frac{45\sqrt{7}}{4}}$$



$$(4)(4-1) \quad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+a}} - \frac{x}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}} = \boxed{\frac{x(x^2+a-1)}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}}$$

(4-2)  $a > 0$  であるから,  $f'(x)$  の符号は分子の符号に一致する.

$a \geq 1$  とすると  $f'(x)$  の符号は負から正へ変化するが, 正から負へとは変化しない.

$0 < a < 1$  のとき,  $y = x(x^2 + a - 1)$  のグラフの概形は右のようになり,

$x = 0$  の前後で  $f'(x)$  の符号が正から負へと変化している.

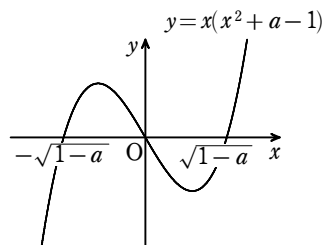
以上から求める条件は  $\boxed{0 < a < 1}$

(4-3)  $f(-x) = f(x)$  より  $f(x)$  は偶関数である.

(4-2) から  $f(x)$  は  $x = 0$  で極大,  $x = \pm\sqrt{1-a}$  で極小となるので,

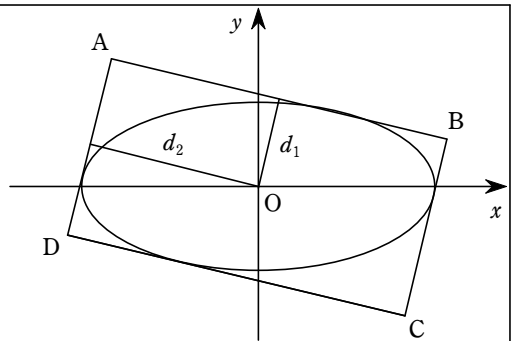
$$\text{極大値 } f(0) = \sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} = \boxed{\frac{a+1}{\sqrt{a}}}$$

$$\text{極小値 } f(\pm\sqrt{1-a}) = \sqrt{(1-a)+a} + \frac{1}{\sqrt{(1-a)+a}} = \boxed{2}$$



座標平面上に楕円  $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  があり、右図のように

長方形  $ABCD$  が  $C$  に接しているとする。直線  $AB$  の方程式を  $ax + by + c = 0$  とし、原点  $O$  と直線  $AB$ ,  $AD$  との距離を  $d_1$ ,  $d_2$  とする。



- (1)  $d_1, d_2$  を求めよ。
- (2) 長方形  $ABCD$  の対角線の長さを求めよ。
- (3) 長方形  $ABCD$  の面積の最大値を求めよ。また、そのときの直線  $AB$  と楕円  $C$  の接点の座標を求めよ。

- (1) 長方形の各辺が座標軸と平行にならない場合を考える。

このとき、直線  $AB$  は  $y = mx + n$  とおける。この直線が楕円  $C$  と接する条件は

$$x^2 + 4(mx + n)^2 = 4$$

$$(4m^2 + 1)x^2 + 8mnx + 4n^2 - 4 = 0 \dots (\times)$$

が重解をもつことなので、

$$(4mn)^2 - (4m^2 + 1)(4n^2 - 4) = 0$$

$$\therefore 4m^2 - n^2 + 1 = 0$$

$$\text{よって } n = \pm \sqrt{4m^2 + 1}$$

$$\text{したがって、直線 } AB, CD \text{ の方程式は } y = mx \pm \sqrt{4m^2 + 1} \dots \textcircled{1}$$

$$\text{このとき、 } d_1 = \frac{\sqrt{4m^2 + 1}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

また、直線  $BC, AD$  は直線  $AB$  に直交するので、直線  $BC, CD$  の方程式は

$$\textcircled{1} \text{ で } m \text{ を } -\frac{1}{m} \text{ としたものであるから、 } d_2 = \frac{\sqrt{4\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2 + 1}} = \frac{\sqrt{m^2 + 4}}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

ここで直線  $AB$  の傾きは  $-\frac{a}{b}$  であるから、 $m = -\frac{a}{b}$  として

$$d_1 = \frac{\sqrt{4\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{a^2 + b^2}}, \quad d_2 = \frac{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 4}}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2 + 1}} = \sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{a^2 + b^2}}$$

長方形の各辺が座標軸と平行になる場合は、 $a = 0$  または  $b = 0$  となるときである。

このとき、 $d_1 = 1, d_2 = 2$  となるが、上の  $d_1, d_2$  で  $a = 0, b = 0$  を代入したものに一致する。

$$\text{以上から、 } d_1 = \sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{a^2 + b^2}}, \quad d_2 = \sqrt{\frac{a^2 + 4b^2}{a^2 + b^2}}$$

$$(2) \quad AC = 2 \cdot OA = 2\sqrt{d_1^2 + d_2^2} = 2\sqrt{\left(\frac{4a^2 + b^2}{a^2 + b^2}\right) + \left(\frac{a^2 + 4b^2}{a^2 + b^2}\right)} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

#### 参考

長方形の各頂点は楕円  $C$  の準円  $x^2 + y^2 = 5$  上にあり、対角線  $AC$  は準円の直径  $2\sqrt{5}$  に一致する。

(3) 長方形の面積  $S$  は

$$S = 2d_1 \cdot 2d_2 = 4 \sqrt{\frac{4m^2 + 1}{m^2 + 1} \cdot \frac{m^2 + 4}{m^2 + 1}} = 4 \sqrt{\frac{4(m^2 + 1)^2 + 9m^2}{(m^2 + 1)^2}} = 4 \sqrt{4 + \frac{9m^2}{(m^2 + 1)^2}}$$

$f(m) = \frac{m^2}{(m^2 + 1)^2}$  とすると,  $f(m)$  は偶関数なので  $m > 0$  で考えれば, 相加平均・相乗平均の不等式から

$$f(m) = \frac{1}{\left(m + \frac{1}{m}\right)^2} \leq \frac{1}{4}$$

等号は  $m = \frac{1}{m}$ , つまり  $m = 1$  のとき成り立つ. よって,  $S$  は  $m = 1$  のとき最大となるので最大値は 10

このとき,  $n = \sqrt{5}$  であるから, (※) より  $x = -\frac{4mn}{4m^2 + 1} = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$

$y = x + \sqrt{5}$  に代入して  $y = \frac{\sqrt{5}}{5}$

以上から接点は  $\left(-\frac{4\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$

$k$  を自然数とする.  $-\sqrt{k} \leq x \leq \sqrt{k}$  をみたす整数  $x$  の個数を  $a_k$  とし,  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  とする.

- (1)  $S_4$  を求めよ.
- (2)  $2\sqrt{k} - 1 < a_k \leq 2\sqrt{k} + 1$  を示せ.
- (3) 極限值  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$  を求めよ.

- (1)  $k=1$  のとき,  $-1 \leq x \leq 1$  に含まれる整数は3個  $\therefore a_1=3$

$k=2$  のとき,  $-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$  に含まれる整数は3個  $\therefore a_2=3$

$k=3$  のとき,  $-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}$  に含まれる整数は3個  $\therefore a_3=3$

$k=4$  のとき,  $-2 \leq x \leq 2$  に含まれる整数は5個  $\therefore a_4=5$

以上から,

$$S_4 = 3 + 3 + 3 + 5 = \boxed{14}$$

- (2)  $\sqrt{k}$  を超えない最大の整数を  $[\sqrt{k}]$  とする.

このとき,  $a_k = 2[\sqrt{k}] + 1$  であり,  $\sqrt{k} - 1 < [\sqrt{k}] \leq \sqrt{k}$  が成り立つから

$$2(\sqrt{k} - 1) < 2[\sqrt{k}] \leq 2\sqrt{k}$$

$$2\sqrt{k} - 1 < 2[\sqrt{k}] + 1 \leq 2\sqrt{k} + 1$$

$$\therefore 2\sqrt{k} - 1 < a_k \leq 2\sqrt{k} + 1 \dots (\times)$$

- (3)  $(\times)$  において  $k=1, 2, \dots, n$  まで辺々足し合わせると

$$\sum_{k=1}^n (2\sqrt{k} - 1) < S_n \leq \sum_{k=1}^n (2\sqrt{k} + 1)$$

$$2 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} - n < S_n \leq 2 \sum_{k=1}^n \sqrt{k} + n$$

辺々  $n^{\frac{3}{2}}$  で割ると,

$$2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} \leq 2 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

ここで,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$