2024 国際医療福祉大（数学再現）2024/1/17 実施　数 80 分

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

※第三者のチェックを受けていないので誤りを含む可能性があります

1

(A)　三角形 ABC において，$\angle A=45^\circ$，$\angle B=60^\circ$，AB$=x$，BC$=2$，AC$=y$ とする．このとき，

$x=\boxed{}+\sqrt{\boxed{}}$，$y=\sqrt{\boxed{}}$ であり，外接円の半径は $\sqrt{\boxed{}}$ である．

(B)　9 人を区別のない 3 つの部屋に 3 人ずつ分けることを考える．

（i）　9 人の部屋の入り方は $\boxed{}$ 通り

（ii）　A, B, C の 3 人のうち少なくとも 2 人以上が同じ部屋に入る入り方は $\boxed{}$ 通り

(C)　x，y，z が出てきて，y，z を x を用いて表す問題

(D)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とするとき，$S_n=2n^2-n+1$ である．このとき，$a_1=\boxed{}$

であり，$n\geqq 2$ のとき $a_n=\boxed{}\,n-\boxed{}$ で，$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=\boxed{}\,n^2-\boxed{}\,n+\boxed{}$ である．

(A)　C から AB に垂線 CH を下す．このとき，

△AHC は，AH$=$CH の直角二等辺三角形であり，

△BCH は，BH : BC : CH $=1:2:\sqrt{3}$ の直角三角形である．

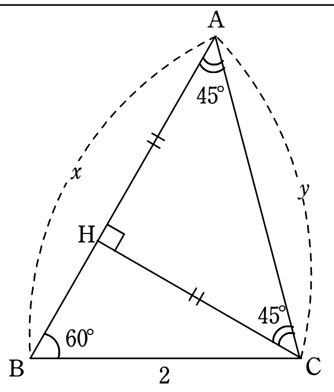
よって，

$$\mathrm{BH}=\frac{1}{2}\mathrm{BC}=1,\quad \mathrm{CH}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{BC}=\sqrt{3}$$

であるから $x=\boxed{1+\sqrt{3}}$，$y=\sqrt{2}\,\mathrm{CH}=\boxed{\sqrt{6}}$

正弦定理より外接円の半径 R は，

$$R=\frac{1}{2}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\sin 60^\circ}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{6}=\boxed{\sqrt{2}}$$



(B)(i)　9 人を区別のない 3 つの部屋に 3 人ずつ分ける方法は，$\dfrac{{}_9\mathrm{C}_3\cdot{}_6\mathrm{C}_3\cdot{}_3\mathrm{C}_3}{3!}=\boxed{280\text{ 通り}}$

(ii) A, B, C がそれぞれ異なる部屋に入る方法は，先に A, B, C を 1 人ずつ 3 部屋に入れ，その後

残りの 6 人を 2 人ずつ分けると考えて，${}_6\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_2\cdot{}_2\mathrm{C}_2=90$ 通り

これを (i) から引けばよいので，$280-90=\boxed{190\text{ 通り}}$

(C)　不明

(D)　$a_1=S_1=\boxed{2}$

$n\geqq 2$ のとき，

$$a_n=S_n-S_{n-1}=2n^2-n+1-\{2(n-1)^2-(n-1)+1\}=\boxed{\mathbf{4n-3}}$$

よって，$a_n=\begin{cases}2 & (n=1)\\ 4n-3 & (n\geqq 2)\end{cases}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=a_1+\sum_{k=1}^{n}\{4(2k-1)-3\}-1=2+\sum_{k=1}^{n}(8k-7)-1$$

$$=1+\frac{n}{2}\{1+(8n-7)\}=\boxed{\mathbf{4n^2-3n+1}}$$

$\boxed{2}$

$[x]$ を x を超えない最大の整数とする．自然数 n に対して，$f(n)=\left[\sqrt{\dfrac{n}{2}+1}\right]$，$g(n)=\left[\dfrac{n+2}{f(n)}\right]$ とする．

(1) $f(8)=\boxed{}$，$f(15)=\boxed{}$，$g(15)=\boxed{}$，$g(20)=\boxed{}$ である．

(2) $f(n)=\ell$（ℓ は 2 以上の自然数）を満たす最小の自然数 n は $n=\boxed{}\ell^2-\boxed{}$ と表せ，
最大の自然数 n は $n=\boxed{}\ell^2+\boxed{}\ell-\boxed{}$ と表せる．

(3) $g(n)=13$ をみたす最小の自然数 n は $n=\boxed{}$ であり，最大の自然数 n は $n=\boxed{}$ である．また，
$g(n)=13$ をみたす自然数 n は $\boxed{}$ 個存在する．

(4) m を 4 以上の自然数とする．$g(n)=2m$ のとき，これをみたす最小の n は $n=\boxed{}m^2-\boxed{}m-\boxed{}$ である．

(1) $f(8)=[\sqrt{5}]=\boxed{2}$，$f(15)=\left[\sqrt{\dfrac{17}{2}}\right]=\boxed{2}$，$g(15)=\left[\dfrac{17}{2}\right]=\boxed{8}$

$f(20)=[\sqrt{11}]=3$ であるから，$g(20)=\left[\dfrac{22}{3}\right]=\boxed{7}$

(2) $f(n)=\ell \iff \ell \leqq \sqrt{\dfrac{n}{2}+1}<\ell+1$

ℓ は 2 以上の自然数であるから，辺々 2 乗して，

$$\ell^2\leqq\frac{n}{2}+1<\ell^2+2\ell+1 \qquad \therefore\ 2\ell^2-2\leqq n<2\ell^2+4\ell$$

これを満たす最小の自然数は $\boxed{\boldsymbol{n=2\ell^2-2}}$ であり，最大の自然数は $\boxed{\boldsymbol{n=2\ell^2+4\ell-1}}$ である．

(3) $f(n)=\ell$ ($\ell\geqq2$)とすると(1)から，

$$2\ell^2-2\leqq n\leqq 2\ell^2+4\ell-1 \cdots ①$$

また，$g(n)=13$ を満たすとき，

$$13\leqq\frac{n+2}{f(n)}<14$$

$$\therefore\ 13\ell-2\leqq n\leqq 14\ell-3 \cdots ②$$

①，② をともに満たす自然数 n が存在する条件は，ℓ が

$$\begin{cases}2\ell^2-2\leqq 14\ell-3\\ 13\ell-2\leqq 2\ell^2+4\ell-1\end{cases} \iff \begin{cases}2\ell^2-14\ell+1\leqq 0 \cdots ③\\ 2\ell^2-9\ell+1\geqq 0 \cdots ④\end{cases}$$

をともに満たすことである．

ここで，$2\ell^2-14\ell+1$ に $\ell=6,\ 7$ を代入すると

$$2\cdot6^2-14\cdot6+1=-11<0,\quad 2\cdot7^2-14\cdot7+1=1>0$$

であり，

$$2\ell^2-14\ell+1=2\left(\ell-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{47}{2}$$

であることから，$2\leqq\ell\leqq6$ の自然数 ℓ が ③ を満たす．同様にして，$\ell\geqq5$ の自然数 ℓ が ④ を満たす．

したがって，$\ell=5,\ 6$ のとき ①，② を満たす自然数 n が存在するので，

$\ell=5$ のとき，$\begin{cases}48\leqq n\leqq 69\\ 63\leqq n\leqq 67\end{cases}$ $\therefore\ 63\leqq n\leqq 67$

$\ell=6$ のとき，$\begin{cases}70\leqq n\leqq 95\\ 76\leqq n\leqq 81\end{cases}$ $\therefore\ 76\leqq n\leqq 81$

以上から，$g(n)=13$ となる自然数 n で最小のものは $\boxed{\boldsymbol{n=63}}$，最大のものは $\boxed{\boldsymbol{n=81}}$ であり，全部で $\boxed{11}$ 個ある．

(4) $g(n)=2m$（$m\geqq4$）のとき，

$$2m\leqq\frac{n+2}{f(n)}<2m+1$$

$$\therefore\ 2mf(n)-2\leqq n\leqq(2m+1)f(n)-3$$

ここで，$f(n)=L$ ($L\in\mathbb{N}$) とすると，(3) と同様にして

$$\begin{cases}2mL-2\leqq n\leqq(2m+1)L-3 \cdots ①\\ 2L^2-2\leqq n\leqq 2L^2+4L-1 \cdots ②\end{cases}$$ （式の番号は新しくした）

①，② をともに満たす自然数 n が存在する条件は，4 以上の自然数 m に対して

$$\begin{cases}2mL-2\leqq 2L^2+4L-1\\ (2m+1)L-3\geqq 2L^2-2\end{cases} \iff \begin{cases}2(m-2)L-2L^2-1\leqq0\\ (2m+1)L-2L^2-1\geqq0\end{cases}$$

をともに満たす自然数 L が存在することである．k を整数として，$L=m+k$ とすると，

$$\begin{cases}2(m-2)(m+k)-2(m+k)^2-1\leqq0\\ (2m+1)(m+k)-2(m+k)^2-1\geqq0\end{cases} \iff \begin{cases}(k+2)m+(k+1)^2\geqq0 \cdots ③\\ (-2k+1)m-2k^2+k-1\geqq0 \cdots ④\end{cases}$$

となる．③ について，$m\geqq4$ で成り立つ条件は，$k\geqq-2$

$k=-2$ のとき，

$$④\iff 5m-11\geqq0$$

となり，これは $m\geqq4$ で成り立つ．

したがって ①，② をともに満たす自然数 n が存在するような L の中で最小のものは $L=m-2$ である．

このとき，①，② は，

$$\begin{cases}2m^2-4m-2\leqq n\leqq 2m^2-3m-5\\ 2m^2-8m+6\leqq n\leqq 2m^2-4m-1\end{cases}$$

となり，

$$(2m^2-4m-2)-(2m^2-8m+6)=2m-8\geqq0$$

であるから，$g(n)=2m$ を満たす自然数 n で最小のものは，$\boxed{\boldsymbol{n=2m^2-4m-2}}$

$\boxed{3}$

四面体OABCがあり，実数 s, t に対して $\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}$ で定まる点Pを考える．

(1) 三角形ABCの重心をGとすると，$\overrightarrow{OG}=\boxed{}\overrightarrow{OA}+\boxed{}\overrightarrow{OB}+\boxed{}\overrightarrow{OC}$ と表せる．

(2) $t=0$ とする．

(i) 点Pが直線AB上にあるとき $s=\boxed{}$ である．

(ii) 直線OGと直線CPの交点をQとする．このとき，$\frac{GQ}{OG}=\boxed{}$，$\frac{CQ}{CP}=\boxed{}$ である．

(3) $s=\frac{1}{3}$ とする．点Pが平面OAC上にあるときを考える．

四面体PABG，四面体OABCの体積をそれぞれ V_1, V_2 とするとき，$\frac{V_2}{V_1}=\frac{\boxed{}}{\boxed{}\boxed{}}$ である．

(4) s，t が，$s\geqq\frac{1}{3}$，$t\geqq0$ をみたしながら動くとき，点 P が動く領域の面積は三角形 OBC の面積の $\boxed{}$ である．→ 面積が ∞ になってしまう

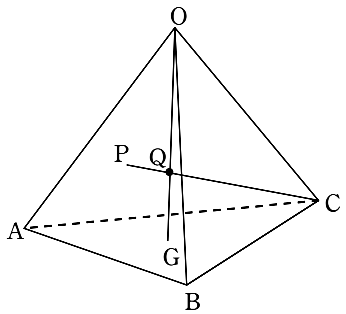
(1) $\boxed{\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}}$

(2)(i) $t=0$ のとき，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}$

点Pが直線AB上に存在するので，$\frac{1}{4}+s=1$ $\therefore$ $\boxed{s=\frac{3}{4}}$

(ii) 点Qは直線OG上なので，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OG}=\frac{k}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})\ \cdots①$$



また，点Qは直線CP上の点なので，実数 ℓ を用いて

$$\overrightarrow{OQ}=\ell\overrightarrow{OP}+(1-\ell)\overrightarrow{OC}=\ell\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OB}\right)+(1-\ell)\overrightarrow{OC}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OQ}=\frac{\ell}{4}\overrightarrow{OA}+s\ell\overrightarrow{OB}+(1-\ell)\overrightarrow{OC}\ \cdots②$$

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ は一次独立であるから，①，②より

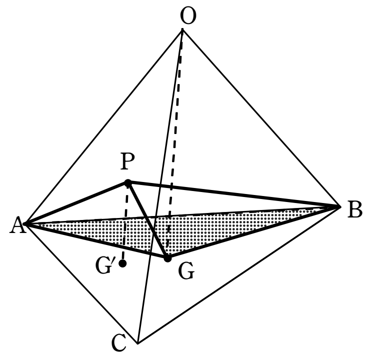
$$\frac{k}{3}=\frac{\ell}{4},\ \frac{k}{3}=s\ell,\ \frac{k}{3}=1-\ell \qquad \therefore\ k=\frac{3}{5},\ \ell=\frac{4}{5},\ s=\frac{1}{4}$$

したがって，$\boxed{\frac{GQ}{OG}=\frac{2}{5}}$，$\boxed{\frac{CQ}{CP}=\frac{4}{5}}$

(3) $s=\frac{1}{3}$ のとき，

$$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}+t(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})$$

$$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{3}-t\right)\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{OC}$$

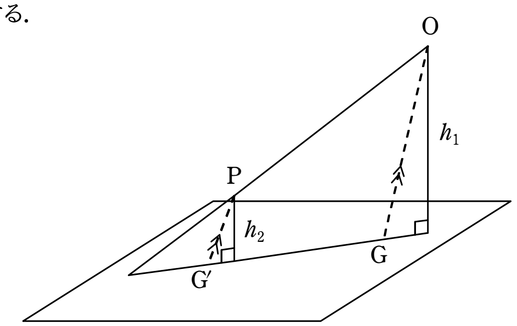


点Pは平面OAC上の点であるから，

$$\frac{1}{3}-t=0 \qquad \therefore\ t=\frac{1}{3}$$

よって，$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

点Pを通り $\overrightarrow{OG}$ に平行な直線と平面ABCとの交点をG′とする．



$\overrightarrow{PG'}$ は実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{PG'}=k\overrightarrow{OG}$$

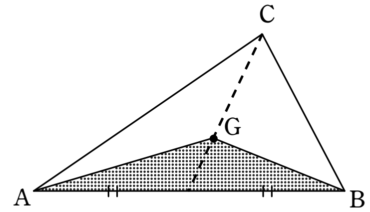
$$\therefore\ \overrightarrow{OG'}=\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{4}\right)\overrightarrow{OA}+\frac{k}{3}\overrightarrow{OB}+\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OC}$$

と表せ，点G′は平面ABC上の点であるから，

$$\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{k}{3}+\left(\frac{k}{3}+\frac{1}{3}\right)=1 \quad \therefore\ k=\frac{5}{12}$$

よって，四面体OABC，四面体PABGの高さをそれぞれ h_1，h_2 とすると，

$$h_1:h_2=12:5$$



また，三角形ABC，三角形ABGの面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，Gは三角形ABCの重心であるから，

$$S_1:S_2=3:1$$

以上から，

$$V_2=\frac{1}{3}S_2h_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S_1\cdot\frac{5}{12}h_1=\frac{5}{36}V_1$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{V_2}{V_1}=\frac{5}{36}}$$

(4) 不明

$\boxed{4}$

曲線 C を $C:f(x)=\dfrac{\log 4x}{\sqrt{x}}$ とする．

(1)　曲線 C と x 軸の交点は $(\boxed{\quad},\ 0)$ である．

(2)　$f'(x)=\dfrac{\boxed{\quad}-\log 4x}{\boxed{\quad}\,x\sqrt{x}}$ であり，$f(x)$ は $x=\boxed{\quad}$ で極大値 $\boxed{\quad}$ をとる．

(3)　C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の y 切片を $g(t)$ とすると，$g(t)=\dfrac{\boxed{\quad}\log 4t-\boxed{\quad}}{\boxed{\quad}\sqrt{t}}$ であり，

$g(t)$ は $t=\boxed{\quad}$ で最大値 $\boxed{\quad}$ をとる．

(4)　曲線 C と直線 $x=\dfrac{e^4}{4}$，x 軸とで囲まれた部分を D とする．D の面積は $\boxed{\quad}$ であり，D を x 軸の周りに回転してできる立体の体積は $\boxed{\quad}\pi$ である．

(1)　$f(x)=0$ とすると，

$$\frac{\log 4x}{\sqrt{x}}=0$$

$$\log 4x=0 \qquad \therefore\quad x=\frac{1}{4}$$

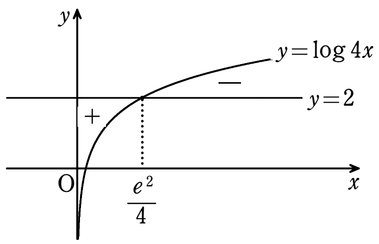
よって，曲線 C と x 軸との交点は $\boxed{\left(\dfrac{1}{4},\ 0\right)}$

(2)

$$f'(x)=\frac{\dfrac{1}{x}\cdot\sqrt{x}-\log 4x\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{x}=\boxed{\frac{2-\log 4x}{2x\sqrt{x}}}$$

$x>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子 $2-\log 4x$ の符号に一致する．
$y=2$ と $y=\log 4x$ のグラフは右のようになるので，$f(x)$ は

$\boxed{x=\dfrac{e^2}{4}}$ で極大となる．



$$f\left(\frac{e^2}{4}\right)=\frac{2}{\dfrac{e}{2}}=\frac{4}{e}$$

であるから，極大値は $\boxed{\dfrac{4}{e}}$

(3)　C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y=f'(t)(x-t)+f(t) \qquad \therefore\quad y=f'(t)x+f(t)-tf'(t)$$

よって，

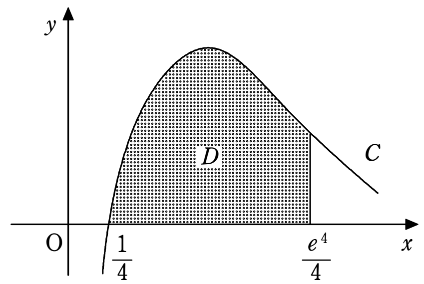
$$g(t)=f(t)-tf'(t)=\frac{\log 4t}{\sqrt{t}}-\frac{2-\log 4t}{2\sqrt{t}}=\boxed{\frac{3\log 4t-2}{2\sqrt{t}}}$$

であるから，

$$g'(t)=\frac{\dfrac{3}{t}\cdot\sqrt{t}-(3\log 4t-2)\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}{2t}=\frac{8-3\log 4t}{4t\sqrt{t}}$$

(2) と同様に考えて，$g(t)$ は $\boxed{t=\dfrac{1}{4}e^{\frac{8}{3}}}$ で最大値 $g\left(\dfrac{1}{4}e^{\frac{8}{3}}\right)=\dfrac{3\cdot\dfrac{8}{3}-2}{2\cdot\dfrac{e^{\frac{4}{3}}}{2}}=\boxed{6e^{-\frac{4}{3}}}$ をとる．

(4)　D は右図の打点部である．
求める面積 S は，



$$S=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}\frac{\log 4x}{\sqrt{x}}dx=\Big[2\sqrt{x}\log 4x\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}-\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}2\sqrt{x}\,dx$$

$$=4e^2-\Big[4\sqrt{x}\Big]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}=4e^2-(2e^2-2)=\boxed{2e^2+2}$$

求める回転体の体積 V は，

$$V=\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}\pi\left(\frac{\log 4x}{\sqrt{x}}\right)^2dx=\pi\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}\frac{(\log 4x)^2}{x}dx=\pi\left[\frac{1}{3}(\log 4x)^3\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{e^4}{4}}=\boxed{\frac{64}{3}\pi}$$