

2024 岩手医科大 (数学再現) 2024/1/17 実施 英数 120 分

(受験生の情報を元に作成していますので、表現等が正確でない可能性があります)

1

n を整数とし、関数 $f(x)$ を $f(x) = n(\log_2 x)^2 + 12\log_2 x + n + 6$ とする。

- (1) $n = 4$ のとき、 $f(x)$ は $x = \square$ で最小値 \square をとる。
- (2) $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつとき、 $n = \square$ である。
- (3) $f(x) = 0$ が $x = 2^k$ (k は整数) を解にもつ n は \square 個あり、その中で最大のものは $n = \square$ である。
- (4) すべての n において $f(x) = 0$ の実数解の最大値は \square である。

(1) $n = 4$ のとき、 $f(x) = 4(\log_2 x)^2 + 12\log_2 x + 10$ ($x > 0$)

$$\log_2 x = X \text{ とすると、 } f(x) = 4X^2 + 12X + 10 = 4\left(X + \frac{3}{2}\right)^2 + 1$$

X は実数全体を動くので、 $X = -\frac{3}{2}$ のとき最小値 1 をとる。

よって、 $f(x)$ は $x = 2^{-\frac{3}{2}}$ のとき、最小値 **1** をとる。

(2)(i) $n = 0$ のとき

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 12\log_2 x + 6 = 0 \quad \therefore x = 2^{-\frac{1}{2}}$$

となり、 $f(x) = 0$ はただ 1 つの実数解をもつ

(ii) $n \neq 0$ のとき

(1) と同様に $\log_2 x = X$ とすると、 x と X は 1 対 1 に対応するので、 $f(x) = 0$ がただ 1 つの実数解をもつ条件は、 $nX^2 + 12X + n + 6 = 0$ がただ 1 つの実数解をもつことである。判別式を D とすると、

$$D = 0 \Leftrightarrow 36 - n(n + 6) = 0$$

$$n^2 + 6n - 36 = 0 \quad \therefore n = -3 \pm 3\sqrt{5}$$

となり n は整数でない。以上から **$n = 0$**

(3) (2) より $n = 0$ のとき $f(x) = 0$ の解は $x = 2^k$ とならないので、 $n \neq 0$ で考える。

$f(x) = 0$ が $x = 2^k$ を解にもつとき、 $nX^2 + 12X + n + 6 = 0 \dots \textcircled{1}$ が少なくとも 1 つ整数解をもつので、

$$D > 0 \Leftrightarrow 3 - 3\sqrt{5} < n < 3 + 3\sqrt{5}$$

また、 $3 < 3\sqrt{5} - 3 < 4$ 、 $-10 < -3\sqrt{5} - 3 < -9$ であり、 n が整数であることから、 $-9 \leq n \leq 3$

この下で $\textcircled{1}$ の解は

$$X = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - n(n + 6)}}{n} \dots \textcircled{2}$$

である。これが整数となるには、 $36 - n(n + 6)$ が平方数になることが必要である。

n	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	1	2	3
$36 - n(n + 6)$	9	20	29	36	41	44	45	44	41	29	20	9

※第三者のチェックを受けていないので誤りを含む可能性があります

平方数になるのは $n = -9, -6, 3$ であり、それぞれ $\textcircled{2}$ に代入すると

$$n = -9 \text{ のとき、 } X = \frac{-6 \pm 3}{-9} = \frac{1}{3}, 1$$

$$n = -6 \text{ のとき、 } X = \frac{-6 \pm 6}{-6} = 0, 2$$

$$n = 3 \text{ のとき、 } X = \frac{-6 \pm 3}{3} = -1, -3$$

となるから、 $\textcircled{1}$ が整数解をもつ n は **3** 個あり、その中で最大のものは **$n = 3$** である。

$$(4) f(x) = 0 \Leftrightarrow nX^2 + 12X + n + 6 = 0 \Leftrightarrow n = -\frac{12X + 6}{X^2 + 1} \dots \textcircled{3}$$

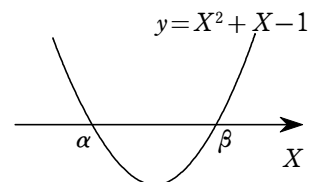
$$g(X) = -\frac{12X + 6}{X^2 + 1} \text{ とする。 } g'(X) = \frac{12(X^2 + X - 1)}{(X^2 + 1)^2} \text{ であり、 } X^2 + 1 > 0 \text{ であるから}$$

$g'(X)$ の符号は $X^2 + X - 1$ の符号に一致する。 $y = X^2 + X - 1$ のグラフは右下のようになるので、

$$X^2 + X - 1 = 0 \text{ の解 } X = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ を } \alpha = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \text{ とおくと、}$$

$g(X)$ の増減は次のようになる。

X	...	α	...	β	...
$g'(X)$	+	0	-	0	+
$g(X)$	\nearrow	$g(\alpha)$	\searrow	$g(\beta)$	\nearrow



ここで、一般に関数 $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ が $x = \alpha$ で極値をもつとき

$$\frac{f'(\alpha)g(\alpha) - f(\alpha)g'(\alpha)}{\{g(\alpha)\}^2} = 0 \quad \therefore \frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} = \frac{g'(\alpha)}{f'(\alpha)}$$

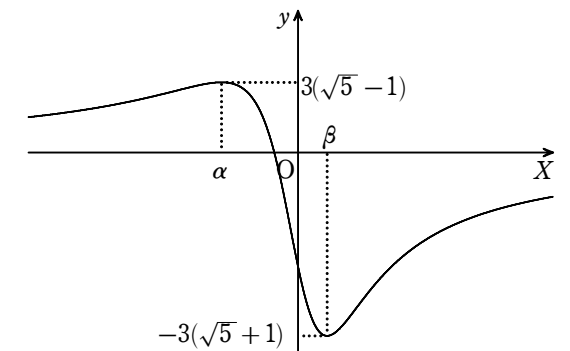
が成り立つので、

$$\begin{cases} g(\alpha) = -\frac{12}{2\alpha} = \frac{-12}{-1 - \sqrt{5}} = 3(\sqrt{5} - 1) \\ g(\beta) = -\frac{12}{2\beta} = \frac{-12}{\sqrt{5} - 1} = -3(\sqrt{5} + 1) \end{cases}$$

であり、 $\lim_{X \rightarrow \pm\infty} g(X) = 0$ であるから、 $y = g(X)$ のグラフは右上のようになる。

$f(x) = 0$ の実数解は 2 つのグラフ $y = n$ と $y = g(X)$ の共有点の X 座標であるから、 $n = -1$ のとき X は最大になる。 $n = -1$ のとき、 $\textcircled{2}$ から $X = 6 \pm \sqrt{41}$

以上から $f(x) = 0$ の実数解のうち最大であるものは、 **$x = 2^{6 + \sqrt{41}}$**



2

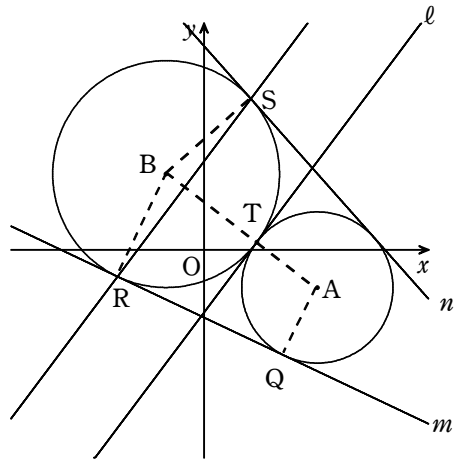
円 $C: x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$ の中心を A とする。円 D は点 $B(-1, 2)$ を中心とし、点 T で円 C と外接する。円 C , 円 D に接する直線のうち、点 T における接線を ℓ とし、残りの2本の接線のうち傾きが大きいものを m , 小さいものを n とする。また、接線 m, n の交点を P とし、接線 m と円 C , 円 D の接点をそれぞれ Q, R とする。

- (1) 円 D の半径は であり、 T の座標は (,) である。
 (2) $QR =$ であり、点 P の座標は (,) である。また、直線 ℓ の方程式は $y =$ $x +$ である。
 (3) 点 R の直線 AB に関する対称点を S とすると、直線 RS の方程式は $y =$ $x +$ である。

- (1) $C: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4$ より、 C は $A(3, -1)$ を中心とする半径2の円である。 $AB = 5$ であり、 C と D が外接するので、 D の半径を r とすると
 $r + 2 = 5 \quad \therefore \quad \boxed{r = 3}$
 $AT = 2, TB = 3$ であるから、 T は線分 AB を $2:3$ に内分する点である。

$$\vec{OT} = \frac{3}{5}\vec{OA} + \frac{2}{5}\vec{OB} = \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{2}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって、 $\boxed{T\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)}$



- (2) A から BR に垂線 AH を下す。
 $BH = BR - HR = BR - AQ = 1$

であるから $\triangle ABH$ において、
 $AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{6}$

- よって、 $\boxed{QR = 2\sqrt{6}}$
 $\triangle BRP \sim \triangle BHA$ であり、相似比が $3:1$ であるから、 $BP = 3BA = 15$
 したがって、 $BA:BP = 1:3$

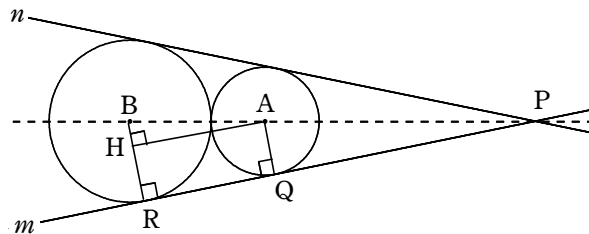
$$\vec{BP} = 3\vec{BA}$$

$$\Leftrightarrow \vec{OP} = 3\vec{OA} - 2\vec{OB} = \begin{pmatrix} 11 \\ -7 \end{pmatrix}$$

よって、 $\boxed{P(11, -7)}$

(直線 AB の傾き) $= -\frac{3}{4}$ であり、直線 ℓ は直線 AB に直交し、点 $T\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ を通る直線であるから、

$$\ell: y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{5}\right) + \frac{1}{5} \quad \therefore \quad \boxed{\ell: y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}}$$



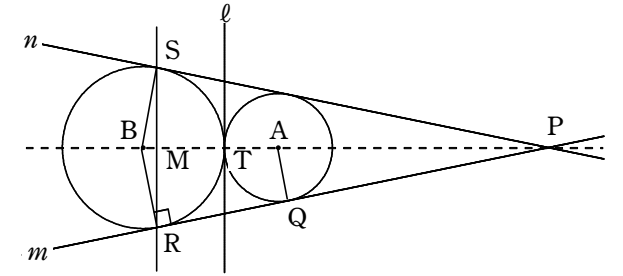
- (3) SR と AB の交点を M とする。
 $\triangle BPR \sim \triangle BRM$ であり、相似比は $5:1$ であるから、 $BM = \frac{1}{5}BR = \frac{3}{5}$
 よって、 $MT = 3 - \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$

であるから、 $BM:MT = 1:4$

$$\vec{OM} = \frac{4}{5}\vec{OB} + \frac{1}{5}\vec{OT} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} -13 \\ 41 \end{pmatrix}$$

よって、 $M\left(-\frac{13}{25}, \frac{41}{25}\right)$ であるから、直線 SR の方程式は

$$y = \frac{4}{3}\left(x + \frac{13}{25}\right) + \frac{41}{25} \quad \therefore \quad \boxed{y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}}$$



参考

直線 SR は、極 P に対する極線であるから、

$$SR: (11+1)(x+1) + (-7-2)(y-2) = 9 \quad \therefore \quad y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

袋の中に A, B, C, D, E と書かれた球が入っている. この袋の中から 3 個の球を取り出し, 書かれているアルファベットを確認して元に戻すという試行を繰り返す.

- (1) この試行を 1 回行ったとき, A が含まれている確率は であり, A, B がともに含まれている確率は である.
- (2) この試行を 5 回行ったとき, すべての試行において A が含まれている確率は であり, すべての試行において A も B も含まれない確率は である.
- (3) この試行を 5 回行ったとき, A が 3 回以上連続して含まれている確率は である.
- (4) 5 回の試行の中で, 少なくとも 1 回はすべての種類の球が取り出される確率は である.

(1) 1 回の試行で A が含まれる確率は, $\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3} = \frac{3}{5}$

1 回の試行で A, B ともに含まれる確率は, $\frac{{}_3C_1}{{}_5C_3} = \frac{3}{10}$

(2) 5 回の試行すべてで A が含まれる確率は, $\left(\frac{3}{5}\right)^5$

1 回の試行で A, B ともに含まれない確率は, C, D, E を取り出すと考えると, $\frac{1}{{}_5C_3} = \frac{1}{10}$

よって, 5 回の試行すべてで A, B ともに含まれない確率は, $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

- (3) 各回の試行において, A が出ることを O, 出ないことを X, どちらでもよいことを ■ で表す.

各試行において, O, X, ■ となる確率はそれぞれ $\frac{3}{5}, \frac{2}{5}, 1$ である.

- (I) A が 3 回連続する場合, 次のパターンがある. (横にその確率を記す)

① ② ③ ④ ⑤

O O O X ■ : $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1$

X O O O X : $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2$

■ X O O O : $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1$

以上から, A が 3 回連続する確率は

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 \times 2 + \left(\frac{3}{5}\right)^3 \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5} \left(2 + \frac{2}{5}\right) = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{8}{5}$$

- (II) A が 4 回連続する場合, 次のパターンがある.

① ② ③ ④ ⑤

O O O O X : $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5}$

X O O O O : $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5}$

以上から, A が 4 回連続する確率は, $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{2}{5} \times 2 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{4}{5}$

(III) A が 5 回連続する確率は, $\left(\frac{3}{5}\right)^5$

- (I) ~ (III) より求める確率は,

$$\left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{8}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^4 \cdot \frac{4}{5} + \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \left(\frac{8}{5} + \frac{4}{5} + \frac{3}{5}\right) = 3 \left(\frac{3}{5}\right)^4$$

- (4) 余事象を考える.

- (i) 3 種類しか取り出されない場合

例えば, C, D, E の 3 種類だけが取り出されるとすると, (2) からその確率は, $\left(\frac{1}{10}\right)^5$

他の 3 種類でも同様なので, ${}_5C_3 \times \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 10 \left(\frac{1}{10}\right)^5$

- (ii) 4 種類しか取り出されない場合

例えば, B, C, D, E の 4 種類だけが取り出されるとする. 1 回の試行で B, C, D, E だけが

取り出される (= A が取り出されない) 確率は $\frac{2}{5}$ であり, これが 5 回起きるとき B, C, D, E が

出ない場合も含まれるので, B, C, D, E の 4 種類が取り出される確率は, $\left(\frac{2}{5}\right)^5 - 4 \left(\frac{1}{10}\right)^5$

他の 4 種類でも同様なので, ${}_5C_4 \times \left\{ \left(\frac{2}{5}\right)^5 - 4 \left(\frac{1}{10}\right)^5 \right\}$

以上から, 求める確率は,

$$1 - \left\{ 10 \left(\frac{1}{10}\right)^5 + 5 \left(\frac{2}{5}\right)^5 - 20 \left(\frac{1}{10}\right)^5 \right\} = 1 - 5 \left(\frac{2}{5}\right)^5 + \left(\frac{1}{10}\right)^4$$