2024 愛知医科大学（数学再現）2024/1/16 実施 80 分

(受験生の情報を元に作成していますので，表現等が正確でない可能性があります)

※第三者のチェックをしていないため誤りを含む場合があります．あくまで参考程度にしてください．

1

(1)　2024 の正の約数の個数と総和を求めよ．

(2)　A，B の 2 人が勝負をして，先に 4 勝した方が勝ちとする．ただし，A，B どちらも勝つ確率は $\frac{1}{2}$ であるとする．

(2−1)　4 試合目で勝敗が決まる確率を求めよ．

(2−2)　6 試合目で勝敗が決まる確率を求めよ．

(3)　平面上の 3 点を A，B，C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=4$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=6$ をみたしている．

(3−1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

(3−2)　三角形 ABC の面積を求めよ．

(4)　a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=\sqrt{x^2+a}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$ とする．

(4−1)　導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(4−2)　関数 $f(x)$ が極大値をもつような定数 a の値の範囲を求めよ．

(4−3)　(4−2) のとき，$f(x)$ の極大値と極小値を求めよ．

(1)　$2024=2^3\cdot11\cdot23$ であるから，2024 の正の約数の個数は　$(1+3)\cdot(1+1)\cdot(1+1)=\boxed{16}$ 個

また，それらの総和は　$(1+2+2^2+2^3)(1+11)(1+23)=\boxed{4320}$

(2) (2−1)　4 試合目で勝敗が決まるのは，どちらかが 4 連勝する場合だから　$2\left(\frac{1}{2}\right)^4=\boxed{\frac{1}{8}}$

(2−2)　6 試合目で A が勝つ場合を考える．

この場合，1 ～ 5 試合目までで A が 3 勝，B が 2 勝して 6 試合目で A が勝つときである．

その確率は　${}_5\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\times\frac{1}{2}=\frac{5}{32}$

B が勝つ場合も同様であるから，求める確率は　$2\times\frac{5}{32}=\boxed{\frac{5}{16}}$

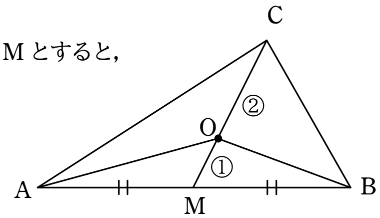
(3) (3−1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|-\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

両辺 2 乗して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2$$

$$16+2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+25=36 \qquad \therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\boxed{-\frac{5}{2}}$$



(3−2)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-2\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}\right)$ であるから，直線 OC と直線 AB の交点を M とすると，

$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-2\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ であるから OM : OC = 1 : 2

三角形 ABC の面積を S とすると，

$(\triangle\mathrm{OAB})=\frac{1}{3}S$，$(\triangle\mathrm{OBC})=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\mathrm{S}=\frac{1}{3}S$，$(\triangle\mathrm{OCA})=\frac{1}{3}S$

であるから，$S=3(\triangle\mathrm{OAB})=3\times\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}})^2}=\boxed{\frac{45\sqrt{7}}{4}}$

(4) (4−1)　$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a}}-\dfrac{x}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}=\boxed{\dfrac{x(x^2+a-1)}{(x^2+a)\sqrt{x^2+a}}}$

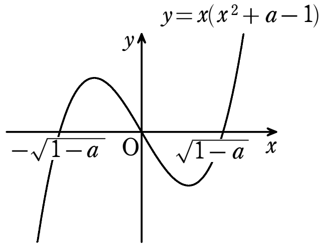
(4−2)　$a>0$ であるから，$f'(x)$ の符号は分子の符号に一致する．

$a\geqq 1$ とすると $f'(x)$ の符号は負から正へ変化するが，正から負へとは変化しない．

$0<a<1$ のとき，$y=x(x^2+a-1)$ のグラフの概形は右のようになり，

$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が正から負へと変化している．

以上から求める条件は $\boxed{0<a<1}$



(4−3)　$f(-x)=f(x)$ より $f(x)$ は偶関数である．

(4−2) から $f(x)$ は $x=0$ で極大，$x=\pm\sqrt{1-a}$ で極小となるので，

極大値 $f(0)=\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}}=\boxed{\dfrac{a+1}{\sqrt{a}}}$

極小値 $f(\pm\sqrt{1-a})=\sqrt{(1-a)+a}+\dfrac{1}{\sqrt{(1-a)+a}}=\boxed{2}$

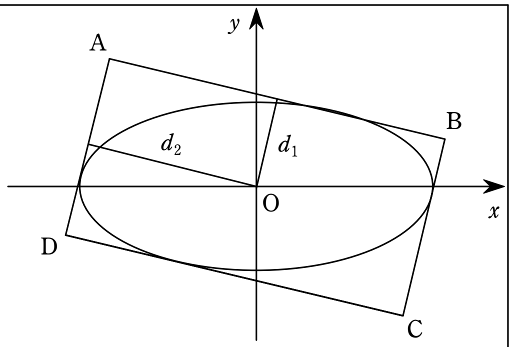
□2

座標平面上に楕円 C：$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ があり，右図のように長方形ABCDが C に接しているとする．直線ABの方程式を $ax+by+c=0$ とし，原点Oと直線AB, ADとの距離を d_1，d_2 とする．

(1) d_1，d_2 を求めよ．

(2) 長方形ABCDの対角線の長さを求めよ．

(3) 長方形ABCDの面積の最大値を求めよ．また，そのときの長方形の頂点を求めよ．



(1) 長方形の各辺が座標軸と平行にならない場合を考える．

このとき，直線ABは $y=mx+n$ とおける．この直線が楕円 C と接する条件は

$$x^2+4(mx+n)^2=4$$

$$(4m^2+1)x^2+8mnx+4n^2-4=0 \cdots (※)$$

が重解をもつことなので，

$$(4mn)^2-(4m^2+1)(4n^2-4)=0$$

$$\therefore\quad 4m^2-n^2+1=0$$

よって　$n=\pm\sqrt{4m^2+1}$

したがって，直線AB，CDの方程式は $y=mx\pm\sqrt{4m^2+1}$ …①

このとき，$d_1=\dfrac{\sqrt{4m^2+1}}{\sqrt{m^2+1}}$

また，直線BC, ADは直線ABに直交するので，直線BC, CDの方程式は

①で m を $-\dfrac{1}{m}$ としたものであるから，$d_2=\dfrac{\sqrt{4\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2+1}}{\sqrt{\left(-\dfrac{1}{m}\right)^2+1}}=\dfrac{\sqrt{m^2+4}}{\sqrt{m^2+1}}$

ここで直線ABの傾きは $-\dfrac{a}{b}$ であるから，$m=-\dfrac{a}{b}$ として

$$d_1=\frac{\sqrt{4\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2+1}}{\sqrt{\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2+1}}=\sqrt{\frac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}},\quad d_2=\frac{\sqrt{\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2+4}}{\sqrt{\left(-\dfrac{a}{b}\right)^2+1}}=\sqrt{\frac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}}$$

長方形の各辺が座標軸と平行になる場合は，$a=0$ または $b=0$ となるときである．

このとき，$d_1=1$，$d_2=2$ となるが，上の d_1，d_2 で $a=0$，$b=0$ を代入したものに一致する．

以上から，$\boxed{d_1=\sqrt{\dfrac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}}，d_2=\sqrt{\dfrac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}}}$

(2) $\mathrm{AC}=2\,\mathrm{OA}=2\sqrt{{d_1}^2+{d_2}^2}=2\sqrt{\left(\dfrac{4a^2+b^2}{a^2+b^2}\right)+\left(\dfrac{a^2+4b^2}{a^2+b^2}\right)}=\boxed{2\sqrt{5}}$

参考

長方形の各頂点は楕円 C の準円 $x^2+y^2=5$ 上にあり，対角線ACは準円の直径 $2\sqrt{5}$ に一致する．

(3)　長方形の面積 S は

$$S=2d_1\cdot 2d_2=4\sqrt{\frac{4m^2+1}{m^2+1}\cdot\frac{m^2+4}{m^2+1}}=4\sqrt{\frac{4(m^2+1)^2+9m^2}{(m^2+1)^2}}=4\sqrt{4+\frac{9m^2}{(m^2+1)^2}}$$

$f(m)=\dfrac{m^2}{(m^2+1)^2}$ とすると，$f(m)$ は偶関数なので $m>0$ で考えれば，相加平均・相乗平均の不等式から

$$f(m)=\frac{1}{\left(m+\dfrac{1}{m}\right)^2}\leqq\frac{1}{4}$$

等号は $m=\dfrac{1}{m}$，つまり $m=1$ のとき成り立つ．よって，S は $m=1$ のとき最大となるので最大値は $\boxed{10}$

このとき，長方形を作る 4 つの直線の方程式は $\begin{cases} y=x\pm\sqrt{5} \\ y=-x\pm\sqrt{5} \end{cases}$ であるから，長方形の各頂点の x 座標は

$x\pm\sqrt{5}=-x\pm\sqrt{5}$

$2x=\pm\sqrt{5}\pm\sqrt{5}$ (複合任意)

$\therefore\quad x=\sqrt{5},\ 0,\ -\sqrt{5},\ 0$

したがって，$\boxed{(\sqrt{5},\ 0),\ (-\sqrt{5},\ 0),\ (0,\ \sqrt{5}),\ (0,\ -\sqrt{5})}$

$\boxed{3}$

k を自然数とする．$-\sqrt{k} \leqq x \leqq \sqrt{k}$ をみたす整数 x の個数を a_k とし，$S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．

(1) S_4 を求めよ．

(2) $2\sqrt{k}-1<a_k \leqq 2\sqrt{k}+1$ を示せ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ を求めよ．

(1) $k=1$ のとき，$-1 \leqq x \leqq 1$ に含まれる整数は3個　$\therefore\quad a_1=3$

$k=2$ のとき，$-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$ に含まれる整数は3個　$\therefore\quad a_2=3$

$k=3$ のとき，$-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ に含まれる整数は3個　$\therefore\quad a_3=3$

$k=4$ のとき，$-2 \leqq x \leqq 2$ に含まれる整数は5個　$\therefore\quad a_4=5$

以上から，

$$S_4=3+3+3+5=\boxed{\mathbf{14}}$$

(2) $\sqrt{k}$ を超えない最大の整数を $[\sqrt{k}]$ とする．

このとき，$a_k=2[\sqrt{k}]+1$ であり，$\sqrt{k}-1<[\sqrt{k}] \leqq \sqrt{k}$ が成り立つから

$$2(\sqrt{k}-1)<2[\sqrt{k}] \leqq 2\sqrt{k}$$

$$2\sqrt{k}-1<2[\sqrt{k}]+1 \leqq 2\sqrt{k}+1$$

$$\therefore\quad 2\sqrt{k}-1<a_k \leqq 2\sqrt{k}+1 \cdots (※)$$

(3) (※) において $k=1, 2, \cdots, n$ まで辺々足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}-1)<S_n \leqq \sum_{k=1}^{n}(2\sqrt{k}+1)$$

$$2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-n<S_n \leqq 2\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}+n$$

辺々 $n^{\frac{3}{2}}$ で割ると，

$$2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}} \leqq 2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x}\,dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$$

であるから，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n^{\frac{3}{2}}}=\boxed{\frac{4}{3}}$$