30 空間ベクトル (共線条件 · 共面条件 · 四面体の体積比)

四面体 OABC があり，実数 s，t に対して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ で定まる点 P を考える．
三角形 ABC の重心を G とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $t = 0$ とする．直線 OG と直線 CP の交点を Q とする．
このとき，$\dfrac{\mathrm{GQ}}{\mathrm{OG}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$，$\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{CP}} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である．

(2) $s = \frac{1}{3}$ とする．点 P が平面 OAC 上にあるときを考える．四面体 PABG，四面体 OABC の体積をそれぞれ V_1，V_2 とするとき，$\dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}\boxed{}}$ である．

【※国際医療福祉大学 (一部抜粋)】

解答

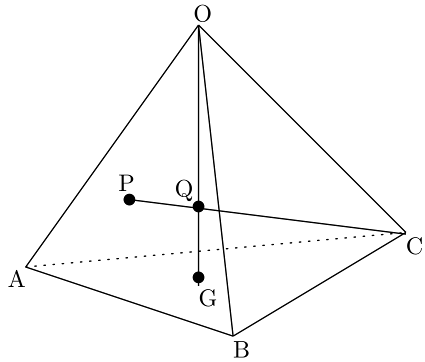
(1) G は△ ABC の重心であるから，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$
点 Q は直線 OG 上の点であるから，実数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{k}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}}) \cdots ①$$

また，点 Q は直線 CP 上の点であるから，実数 ℓ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \ell\overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1-\ell)\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \ell\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) + (1-\ell)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{\ell}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\ell\overrightarrow{\mathrm{OB}} + (1-\ell)\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdots ②$$



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は一次独立であるから，①，② より，

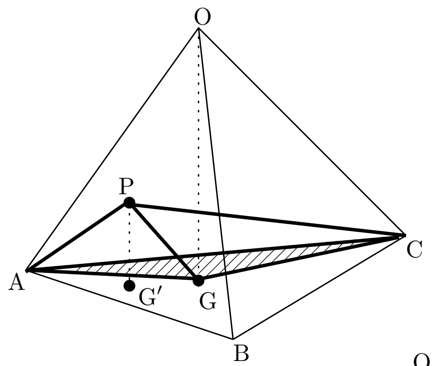
$$\frac{k}{3} = \frac{\ell}{4},\ \frac{k}{3} = s\ell,\ \frac{k}{3} = 1-\ell \quad \therefore \quad k = \frac{3}{5},\ \ell = \frac{4}{5},\ s = \frac{1}{4}$$

したがって，$\boxed{\dfrac{\mathbf{GQ}}{\mathbf{OG}} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$，$\boxed{\dfrac{\mathbf{CQ}}{\mathbf{CP}} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}}$

(2) $s = \frac{1}{3}$ のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \left(\frac{1}{3} - t\right)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



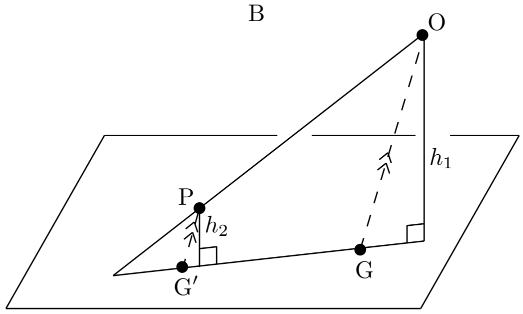
点 P は平面 OAC 上の点であるから，$\frac{1}{3} - t = 0 \quad \therefore \quad t = \frac{1}{3}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$

点 P を通り $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ に平行な直線と平面 ABC との交点を G′ とする．
$\overrightarrow{\mathrm{PG'}}$ は実数 k を用いて，

$$\overrightarrow{\mathrm{PG'}} = k\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OG'}} = \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{k}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}} + \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{3}\right)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$



と表せ，点 G′ は平面 ABC 上の点であるから，

$$\left(\frac{k}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{k}{3} + \left(\frac{k}{3} + \frac{1}{3}\right) = 1 \quad \therefore \quad k = \frac{5}{12}$$

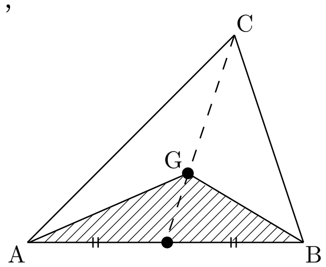
よって，四面体 OABC，四面体 PABG の高さをそれぞれ h_1，h_2 とすると，

$$h_1 : h_2 = 12 : 5$$

また，三角形 ABC，三角形 ABG の面積をそれぞれ S_1，S_2 とすると，
G は三角形 ABC の重心であるから，

$$S_1 : S_2 = 3 : 1$$

以上から，



$$V_2 = \frac{1}{3}S_2h_2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}S_1\cdot\frac{5}{12}h_1 = \frac{5}{36}V_1 \quad \therefore \quad \boxed{\frac{\mathbf{V_2}}{\mathbf{V_1}} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{36}}}$$